Die Vermessung der Erde

Astronomie für Nicht-Physiker:
Die Vermessung des Weltalls

Markus Pössel

Haus der Astronomie

24. Oktober 2019

Organisatorisches

Reguläre Studierende: Bitte für Schein/Benachrichtigung mit eigenem Uni-ID auf die Anwesenheitsliste eintragen: https://uebungen.physik.uni-heidelberg.de/v/1092

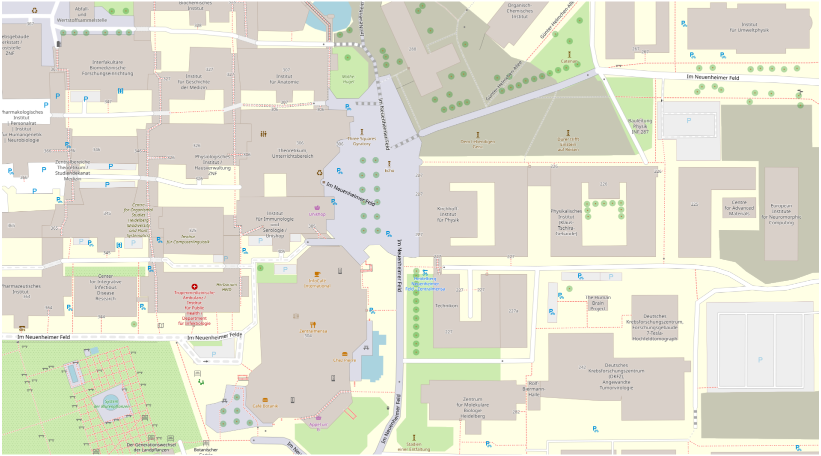
Gasthörer*innen: Bitte für Benachrichtigung eintragen auf: http://www.haus-der-astronomie.de/nichtphysiker/kontakt

Alle: Vorlesungsfolien: erst (ohne Einloggen) auf https://uebungen.physik.uni-heidelberg.de/vorlesung/20192/1092 — dann auf Folie klicken und auf Anforderung Benutzername “Vermessung”, Passwort “AfNPDVdW”

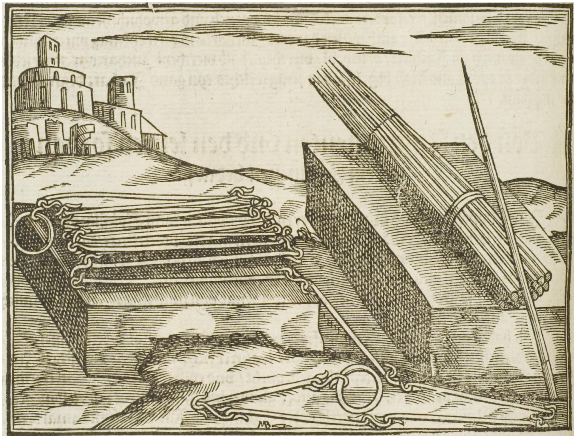
Übersicht

Unsere Umgebung ist (mehr oder weniger) flach

Flache Karten: Maßstabstreue



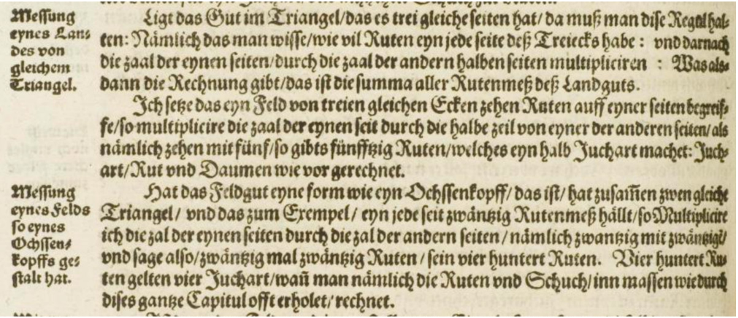
Vermessung im Flachen: Felder, Städte



Aus: Carolo Stephano und Johanne Liebhalto, Siben Bücher von dem Feldbau, Straßburg 1580

Ursprünglich: Besitzansprüche (Grundbuch), Fluordnung.
Später: Kartographie, Planung, Vorschriften

Vermessung im Flachen: Geometrie


Messung eynes Lands von gleichem Triangel.

Ligt das Gut im Triangel/das es trei gleiche seiten hat/ da muß man dise Regel halten: Nämlich das man wisse/wie vil Ruten eyn jede seite deß Treiecks habe: vnd darnach die zaal der eynen seiten/durch die zaal der andern halben seiten multipliciren : Was als dann die Rechnung gibt/das ist die summa aller Rutenmeß deß Landguts.

Ich setze das eyn Feld von treien gleichen Ecken zehen Ruten auff eyner seiten begreiffe/so multiplicire die zaal der eynen seit durch die halbe zeil von eyner der anderen seiten/als nämlich zehen mit fünf/so gibts fünfftzig Ruten/welches eyn halb Juchart machet: Juchart/Rut vnd Daumen wie vor gerechnet.

Messung eynes Felds so eynes Ochssens kopffs gestalt hat.

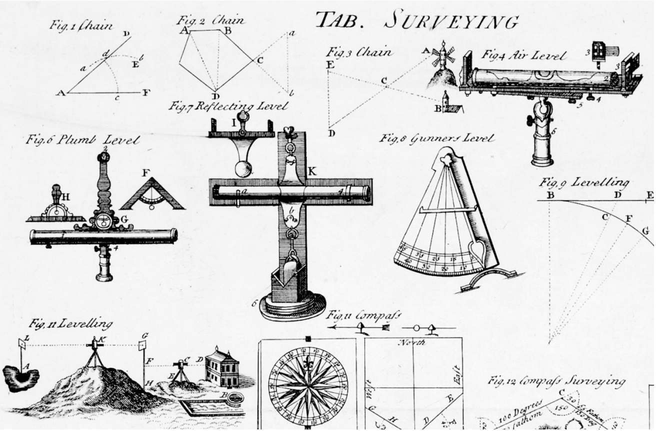
Hat das Feldgut eyne form wie eyn Ochssenkopff/ das ist/ hat zusammen zwen gleiche Triangel/ vnd das zum Exempel/ eyn jede seit zwäntzig Rutenmeß hällt/so Multiplicire ich die zal der eynen seiten durch die zal der andern seiten/nämlich zwantzig mit zwäntzig/ vnd sage also/zwäntzig mal zwäntzig Ruten/sein vier huntert Ruten. Vier huntert Ruten gelten vier Juchart/wañ man nämlich die Ruten vnd Schuch/inn massen wie durch dises gantze Capitul offt erholet/rechnet.

Aus: Carolo Stephano und Johanne Liebhalto, Siben Bücher von dem Feldbau, Straßburg 1580, S. 478

Nutze Beziehungen der (euklidischen) Geometrie für Orts- und Flächenbestimmungen!

Peilungen und Winkelmessung

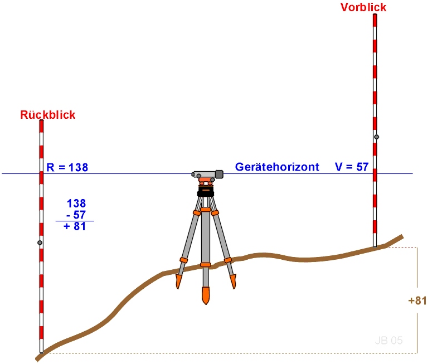
Großer Schritt: Nachziehen der Strecken → Winkelmessung



Sammelgrafik aus E. Chambers, *Cyclopædia* (1782), vol. 2, table after p. 156.

Dreidimensionale Messpunkt-Netze I: Nivelliergeräte

Optisches Nivelliergerät auf Dreibein. Nutzer Clickgauche auf Wikimedia Commons unter Lizenz CC-BY-SA

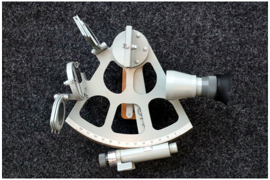


Beispiel für einen Nivellementsstandpunkt. Grafik: Joachim Baecker 2005 via Wikimedia Commons unter Lizenz CC BY-SA 2.0 DE

Peilungen jeweils Horizontal (orientiert am lokalen Lot)

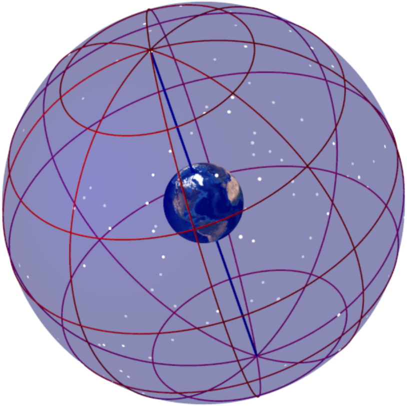
Dreidimensionale Messpunkt-Netze II: Theodoliten

Astronomische Navigation



Winkelmessung am Nachthimmel plus Zeitmessung erlaubt Positionsbestimmung

Harrisons Chronometer H5 [eigener Ausschnitt]. Bild: Racklevel on English Wikipedia unter Lizenz CC BY 2.5



Entfernungsmessungen

Messkette, Maßband und ähnliche Geräte liefern Entfernungswerte durch direkten Vergleich

Schwierig

- über große Distanzen
- in unzugänglichem Gelände

Alternativen:
Indirekte Längenmessungen, oder kombiniere Längenmessungen und Winkelmessungen!

Entfernungsmessung I: Lichtlaufzeit

Spezielle Relativitätstheorie:

$$c_{vakuum} = 299\,792\,458 \text{ m/s}.$$

Im Medium:

$$c_{medium} = \frac{c_{vakuum}}{n}$$

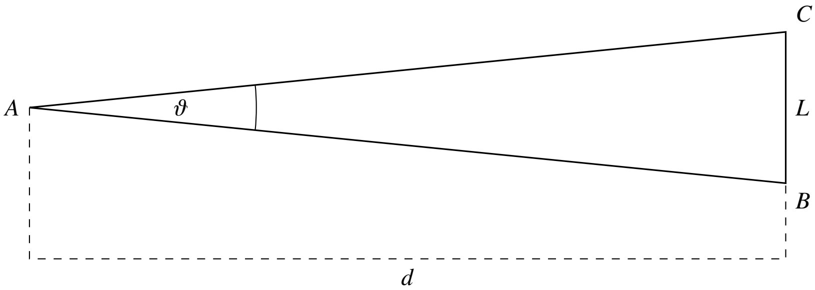
mit Brechungsindex n. Für Luft: $n = 1 + 3 \cdot 10^{-4}$.

$$d = \frac{1}{2} c_{medium} \cdot \Delta t$$

Zusammen mit Theodolit: Tachymeter/Totalstation

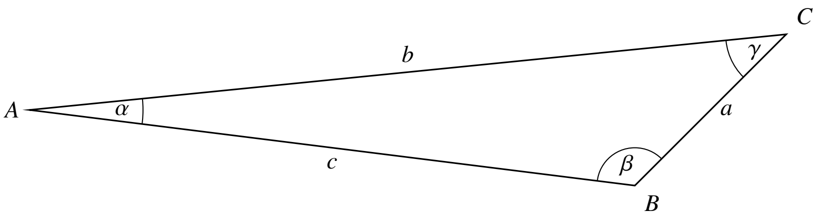
→ **Astronomie: Lichtlaufzeiten**

Geometrische Grundbeziehung



$$\vartheta = 2 \cdot \arctan\left[\frac{L}{2d}\right] \approx \frac{L}{d}$$ (letzteres nur für ϑ im Bogenmaß)

Allgemeineres Dreieck

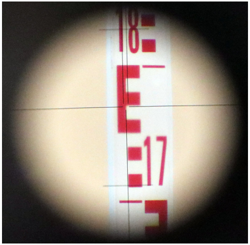


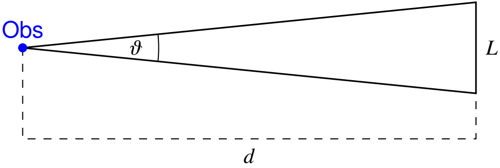
Siehe erste Vorlesung:

$$a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cos(\gamma) = c^2$$ **Kosinus-Satz**

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$ **Sinus-Satz**

Entfernungsmessung II: Bekannte Länge anpeilen

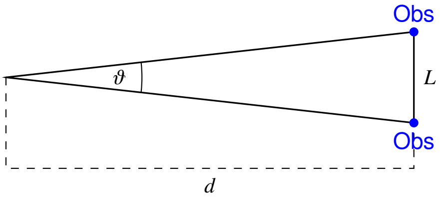




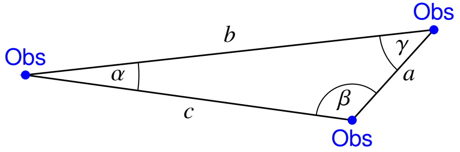
→ Kosmologie: Winkelabstand

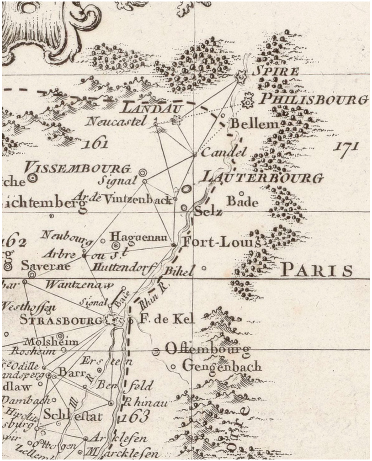
Entfernungsmessung III: Peilung von Grundlinie aus

Entfernungsbestimmung für fernen Punkt: (→ **Parallaxe**)



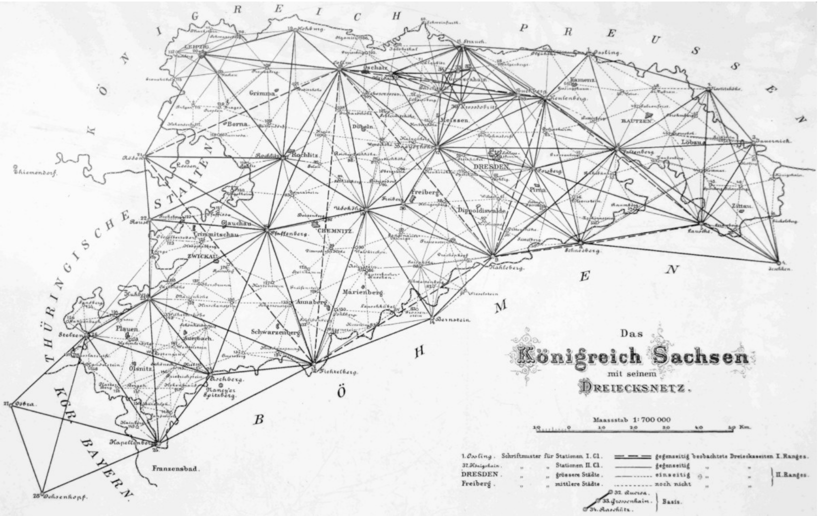
Netz aus Dreiecken: Triangulation





Cassini-Karte 1744

Landvermessung mit Dreiecksnetzen



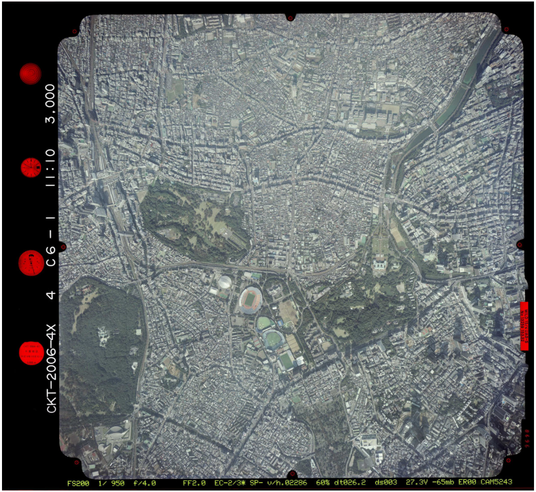
Triangulationspunkte der Königlich-Sächsischen Triangulierung, ca. 1890, via Wikimedia Commons

Photogrammetrie mit Luftbildern

Gleichzeitige Winkelmessung für alle erkennbaren Strukturen

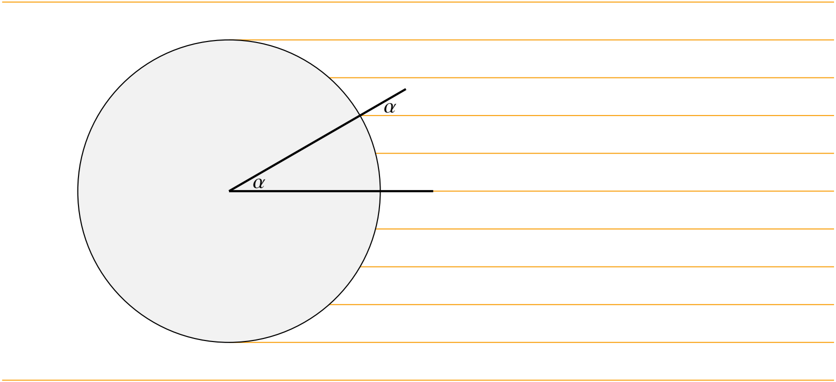
Senkrechte Aufnahme: (verzerrte) Sofortkarte

Doppelkamera: Stereoskopische Aufnahmen



Luftbild der Umgebung von Shinjuku Gyoen (Tokio), Geospatial Information Authority of Japan via Wikimedia Commons, unter Lizenz CC BY 4.0

Kugelgestalt: Erathostenes



Alexandria vs. Assuan: α “50. Teil eines Vollkreises”.
Entfernung 5000 Stadien.

$$\text{Erdradius} = 5000 \text{ Stadien} \cdot 50 = 250\,000 \text{ Stadien} \sim 39\,000 \text{ km}$$

Kugelgestalt: Pariser-Meridian-Expedition

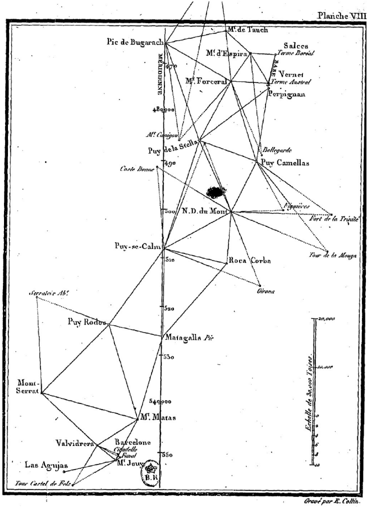
Jean-Baptiste Joseph Delambre,
Pierre Méchain 1792–1798

Ziel: Definition des Meters

Viertel-Umfang als 10 000 km gemessen (modern: 10 002,29 km)

Ken Alder, *The Measure of All Things*, 2002

Fehlerquellen:
Gravitationsanomalien,
Abweichung von Kugelgestalt



Delambre: Base du système métrique décimal (1806)

Erdvermessung mit Satelliten: NASAs “Blue Marble”

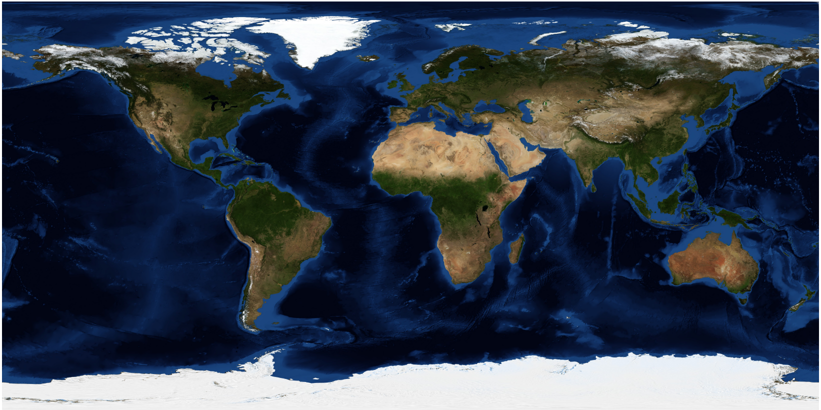


Bild: NASA / Goddard Space Flight Center

Satellitennavigation

Aus Lichtlaufzeit-Angaben:

Abstand zu ≥4 Satelliten

Konstellation so dass jeweils genügend Satelliten sichtbar

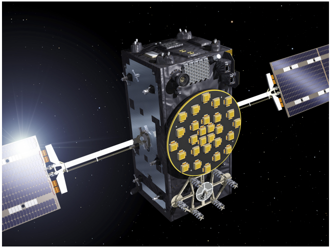


Bild: ESA

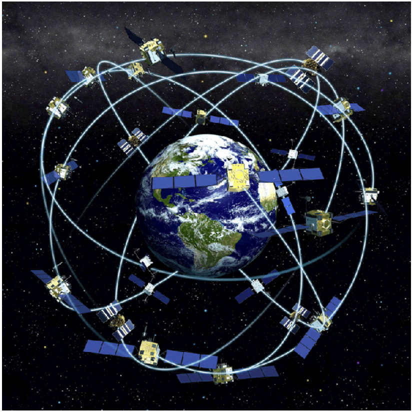
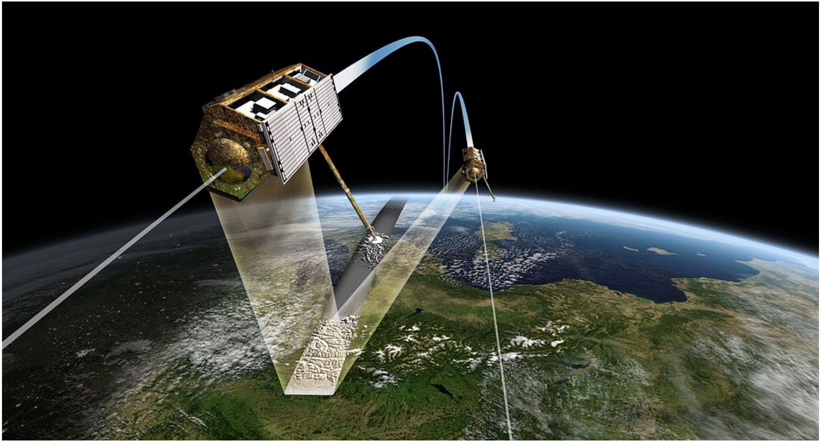


Bild: NOAA

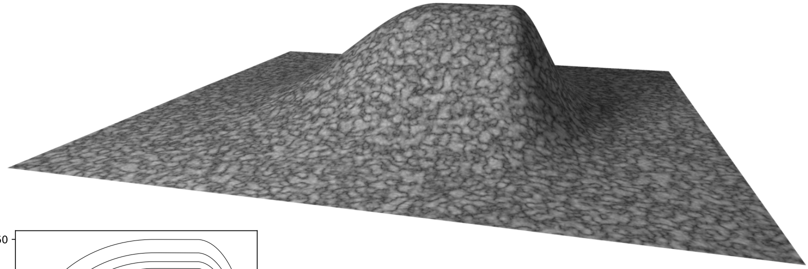
Tandem-X-Mission des DLR

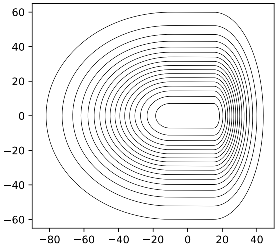


Stereoskopische Radarmessungen mit TerraSAR-X und TanDEM-X. Bild: DLR unter Lizenz CC BY 3.0

12×12 Meter-Raster, Höhenauflösung 2 Meter

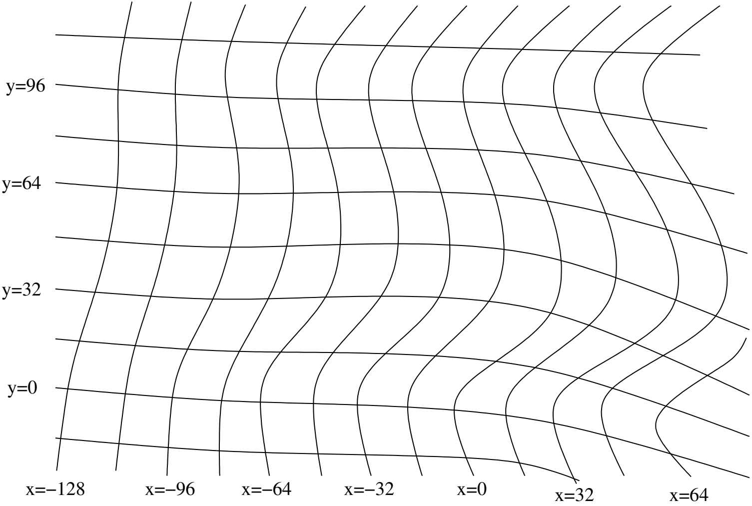
Einsamer Hügel



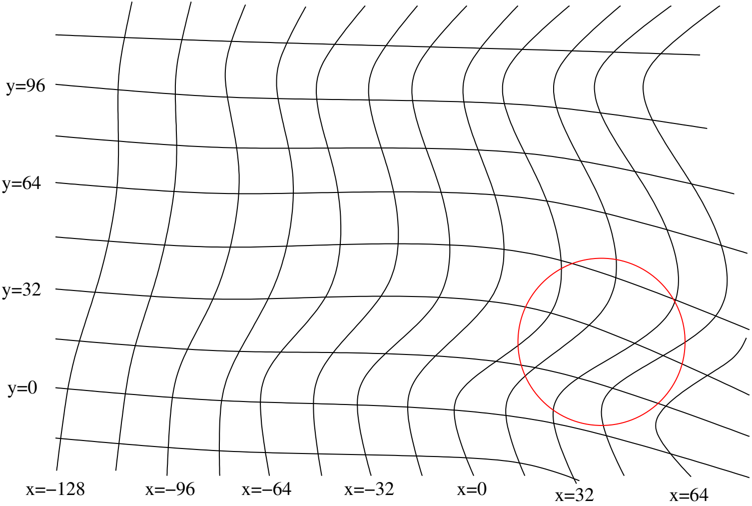


Wie kann man gekrümmte Flächen wie die Erdoberfäche kartieren und beschreiben?

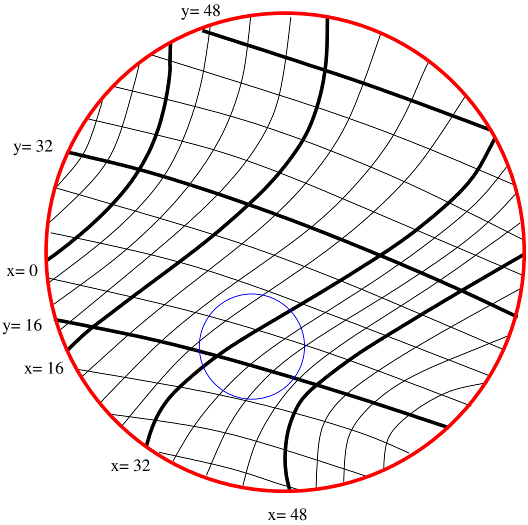
Gekrümmter Fläche: Vogelperspektive



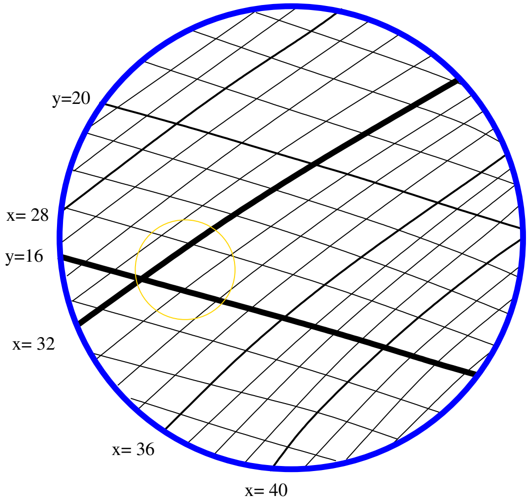
Gekrümmte Koordinaten: Hineinzoomen



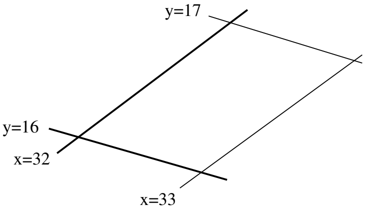
Gekrümmte Koordinaten: Hineinzoomen



Gekrümmte Koordinaten: Hineinzoomen

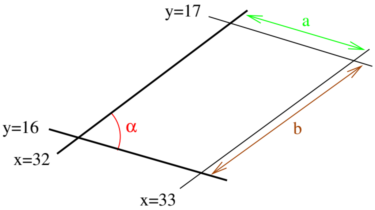


Gekrümmter Fläche: Geometrische Beschreibung



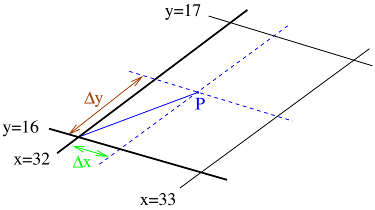
Das ist recht einfach: Parallelogramm!

Beschreibung gekrümmter Flächen



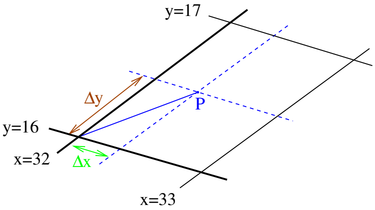
Senkrecht zur (lokal fast ebenen) Oberfläche, längentreue Abbildung: 3 charakteristische Parameter ablesbar

Beschreibung gekrümmter Flächen



Wie lang ist die blaue Linie zwischen $(32, 16)$ und P?

Beschreibung gekrümmter Flächen



$\vec{P} = (b\,\Delta y)\,\vec{u}_y + (a\,\Delta x)\,\vec{u}_x$ where $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = \cos\alpha$ means that

$$|\vec{P}|^2 = a^2\,\Delta x^2 + 2ab\,\cos\alpha\,\Delta x\Delta y + b^2\,\Delta y^2.$$

Mit dieser Verbesserung können unsere Koordinaten verwendet werden, um (zunächst im Kleinen) Längen zu messen!

Die Metrik

$$\Delta s^2 = |\vec{P}|^2 = a^2\,\Delta x^2 + 2ab\,\cos\alpha\,\Delta x\Delta y + b^2\,\Delta y^2$$

Drei unabhängige Parameter – die wir umbenennen:

$$\Delta s^2 = g_{11}\,\Delta x^2 + 2g_{12}\,\Delta x\Delta y + g_{22}\,\Delta y^2.$$

Achtung: Im allgemeinen sind die Koeffizienten ortsabhängig, $g_{ij}(x,y)$. Exakt ist die Formel nur, wenn die Koordinatenumgebung infinitesimal klein ist:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{11}(x,y)\,\mathrm{d}x^2 + 2g_{12}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + g_{22}(x,y)\,\mathrm{d}y^2.$$

$\mathrm{d}s^2$ heißt **Metrik**, die $g_{ij}(x,y)$ heißen **metrische Koeffizienten**.

Erstmals erfunden von Carl Friedrich Gauß

Wie geht es weiter?

- Erdvermessung z.T. übertragbar auf andere Planeten!
- Geometrie und Parallaxe: Vermessung des Sonnensystems
- Metrik: Zentrales Konzept der Allgemeinen Relativitätstheorie
- Winkelentfernung: Kosmologie

Nächste Vorlesung, am 31.10.2019:
Stefan Jordan, Vermessung des Sonnensystems
von der Antike zur Neuzeit