



Singularitäten, Quantentheorie, Quantengravitation

Vom Schwarzen Loch bis zum Urknall: Einsteins
Astrophysik für Nicht-Physiker

Markus Pössel & Björn Malte Schäfer

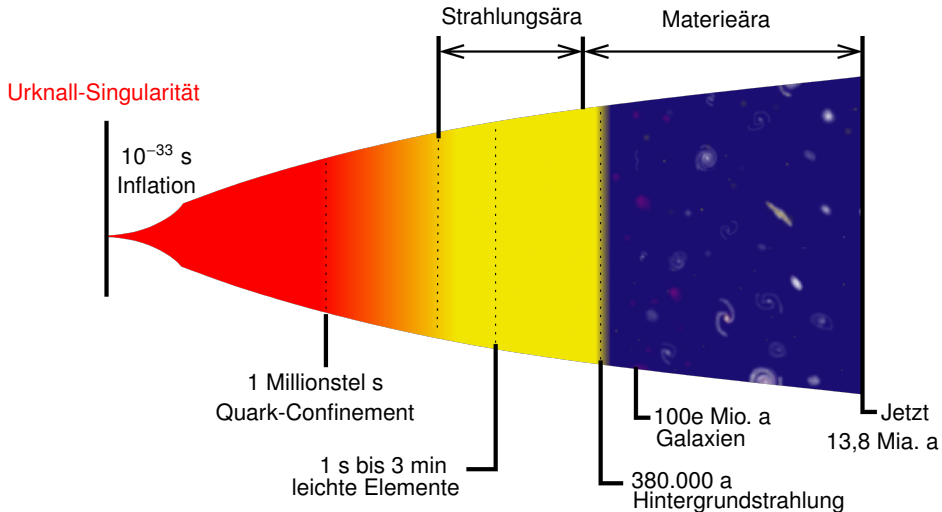
Haus der Astronomie/Institut für Theoretische Astrophysik

28.1.2016

Inhalt

- 1 Singularitäten
- 2 Quanten(feld)theorie
- 3 Quanten in gekrümmter Raumzeit
- 4 Planck-Skala
- 5 Quantengravitation
- 6 Fazit

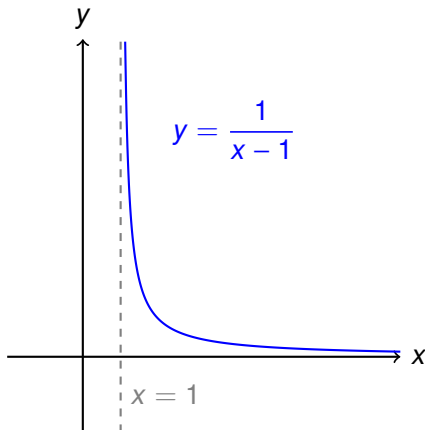
Urknall-Singularität



Singularitäten

Singularitäten: Irgendetwas geht schief, insbes. $\rightarrow \infty$

Einfachster Fall:



Metrische Singularitäten

Schwarzschild-Metrik: Unendlichkeiten für $r \rightarrow 0$

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right] c^2 dt^2 + \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right]^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Homogenes Universum mit

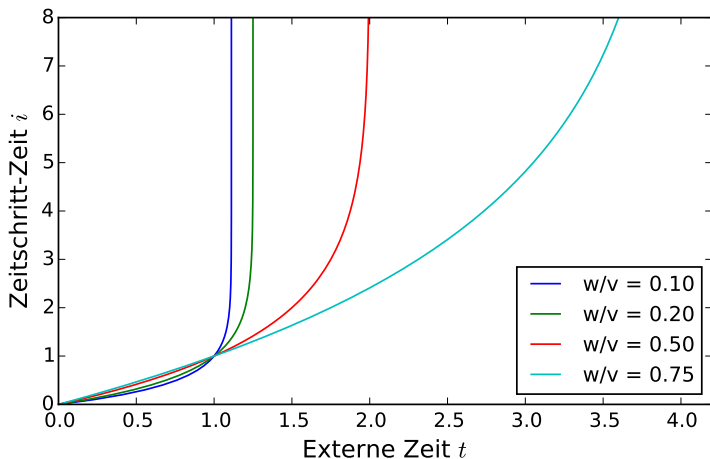
Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik: Unendlichkeiten für $t \rightarrow 0$: im flachen Fall für kleines $a(t)$ strahlungsdominiert ist $a(t) \sim \sqrt{t}$ in

$$ds^2 = - - c^2 dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Dichten $\rho_{mat} \sim a^{-3}$ bzw. $\rho_{rad} \sim a^{-4}$ gehen $\rightarrow \infty$!

Koordinatensingularitäten

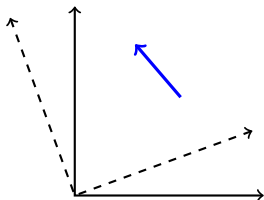
Wir hatten aber auch Koordinatensingularitäten kennengelernt – wie grenzt man das ab? (Siehe ursprüngliche Schwarzschild-Singularität!)



Echte Singularitäten

Nicht nur metrische Koeffizienten, sondern *skalare Invarianten der Krümmung* werden unendlich.

Einfaches Beispiel skalare Invariante:
Betrag eines Vektors (z.B. Länge einer
Verschiebung)



Für Riemann-Krümmungstensor: ähnliche „Längen“, die nicht von der Koordinatenwahl abhängen \Rightarrow gehen bei Schwarzschild, FLRW gegen unendlich! (Bei FLRW direkter Zusammenhang mit $\rho \rightarrow \infty$.)

Singularitäten und Differentialgleichungen

Ein Zugang: Betrachte Differentialgleichungen (Einstein-Gleichungen) nahe der Singularität, untersuche allgemeine Eigenschaften.

Beispiel: BKL-Singularitäten (Belinskij, Khalatnikov, Lifshits 1970)

Wild oszillierende Gezeitenkräfte bei Annäherung an die Singularität – z.T. in heutigen numerischen Simulationen nachvollzogen

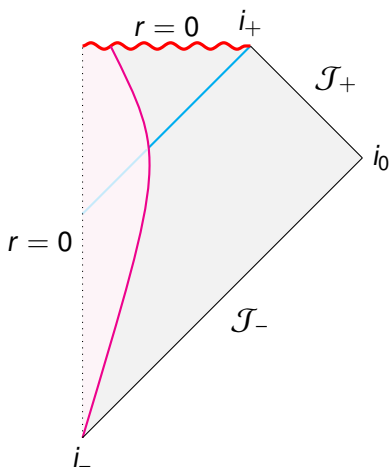
(allgemeinverständlich z.B. in Garfinkle 2007)

Geometrische Singularitäten

Geodäten = geradestmögliche Bahnen
= u.a. Bahnen von frei fallenden
Teilchen und von Licht

Analog zur Gerade in der Ebene:
Geradenstück lässt sich beliebig weit
fortsetzen. Auch Geodäten fortsetzbar –
es sei denn, die Geodäte läuft in eine
sehr ungewöhnliche Region!

Singularität dort, wo eine Raumzeit
geodätisch unvollständig ist (d.h.
Geodäten auf einmal nicht mehr
fortsetzbar)



Singularitätentheoreme

Kommen die Singularitäten in Schwarzschild-/FLRW-Raumzeit alleine aufgrund der hohen Symmetrie zustande?

Bei Radialsymmetrie: Kollaps auf einen Punkt hin ist nur bei perfekter Symmetrie gegeben — was ist, wenn es kleine Störungen gibt?

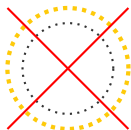
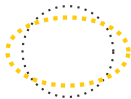
Ab den 1960er Jahren: Allgemeine Überlegungen, die auch kleine Störungen/Abweichungen von den gegebenen Symmetrien zulassen. Grundlagen: Raychaudhuri-Gleichung (Fokussierung/Defokussierung von Geodäten; 1955+)

Singularitätentheoreme

Geometrische Betrachtungen zum Gravitationskollaps (Penrose 1965): Wenn Raumzeit

- 1 „gefangene Fläche“ („trapped surface“) besitzt, wo selbst nach außen laufende Lichtbahnen konvergieren
- 2 sich Anfangsbedingungen definieren lassen, die die Raumzeit vollständig bestimmen (Cauchy-Fläche)
- 3 die starke Energiebedingung gilt (im einfachsten Fall $\rho + p/c^2 \geq 0, \rho + 3p/c^2 \geq 0$, entspricht Fokussier-Bedingung)

dann gibt es zukunfts-inkomplette Geodäten (d.h. Teilchen-/Lichtbahnen, die in der Zukunft einfach enden) \Rightarrow Singularität!



Singularitätentheoreme

Stephen Hawking, Penrose, Robert Geroch, George Ellis 1966+:
Erweiterung auf Urknall-Singularität („Zurückrechnen in die
Vergangenheit“)

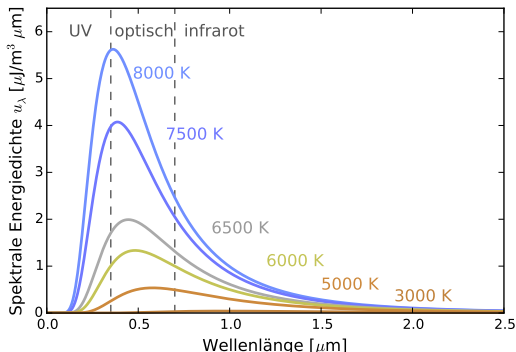
Hawking: Weitere Verbesserung, u.a. Einführung konjugierter
Punkte (Bündel von Weltlinien mit mehreren „Brennpunkten“;
Höhepunkt mit Hawking & Penrose 1970

Insgesamt: **Singularitäten wird man nicht los!**

Allerdings: Singularitäten betreffen winzige Längenskalen, hohe
Energien — dort sollte, ganz allgemein, die *Quantentheorie* wichtig
werden, die bislang nicht einbezogen wurde.

Quantentheorie

Zweite Grundsäule der Physik (neben ART)

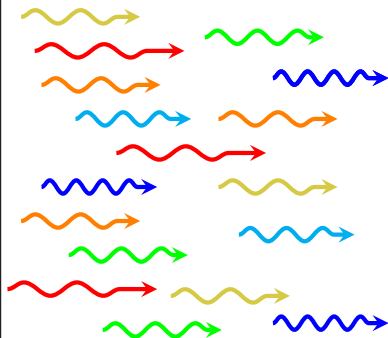


1900–1935 auf Plancks Ableitung seiner Strahlungsformel aufbauend: Quantenphysik von Bohr, Heisenberg, Schrödinger, Born, Jordan.

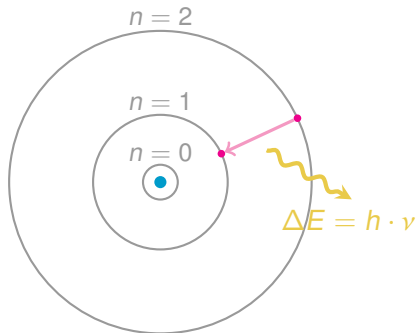
Quantenmechanik

Einzelne Teilchen (incl. Licht), u.a. in externem Potenzial

Photonen



Atommodelle

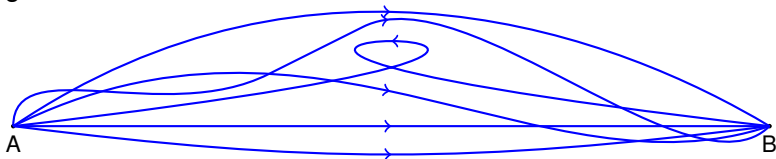


Quantenmechanik

Charakteristisch: Welleneigenschaften von Teilchen,
Teilcheneigenschaften von Wellen

Nur noch *Wahrscheinlichkeiten* für Wechselwirkungen,
Teilchenorte etc. angebar (stochastische Beschreibung)

Feynman-Formulierung: Wahrscheinlichkeit, dass Teilchen von A
nach B gelangt, ergibt sich als Summe über Beiträge aller Pfade
(Weltlinien), über die das Teilchen überhaupt von A nach B
gelangen kann!



Quantenfeldtheorie

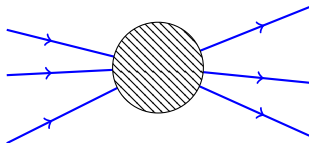
Relativistische Quantenmechanik: Dirac, Klein-Gordon u.a.;
Quantenfeldtheorie: Schwinger, Feynman und andere: Grundlage
der modernen Elementarteilchenphysik

Direkte Vorhersage aus relativistischer Mechanik: Existenz von
Antiteilchen: gleiche Masse, umgekehrte Vorzeichen bei allen
Ladungen (z.B. elektrische Ladung)

Rechnungen mit Wechselwirkungen schwierig!
Näherungslösungen: **Gittertheorien** (gebundene Systeme;
Raumzeit in endliche Bausteine zerteilt) und **Störungstheorie**.

Quantenfeldtheorie: Störungstheorie

Grundsituation: Freie Teilchen fliegen hinein, freie Teilchen fliegen hinaus – definiere „einlaufende“ und „auslaufende“ Zustände, jeweils: Vakuum (kein Teilchen), ein Teilchen, zwei Teilchen usw.



Gut zur Beschreibung von Reaktionen in Teilchenbeschleunigern:
Freie Teilchen fliegen aufeinander zu, kurze und räumlich begrenzte Wechselwirkung

Quantenfeldtheorie: Störungstheorie

Erweiterung des Feynman-Bilds: alle möglichen Prozesse laufen ab. Aber nicht alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit!

Vereinfacht: Wahrscheinlichkeit, dass Teilchen wechselwirken, ist proportional zur Kopplungskonstante der Kraft, $g < 1$:

Prozess mit 1 Wechselwirkung: $P \sim g$

Prozess mit 2 Wechselwirkungen: $P \sim g^2$

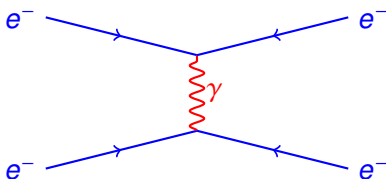
Prozess mit 3 Wechselwirkungen: $P \sim g^3$

...

Prozess mit n Wechselwirkungen: $P \sim g^n$

Quantenfeldtheorie: Störungstheorie

Diagramm-Abkürzung für Prozesse: Feynman-Diagramme (nach genau definierten Regeln in Formeln für Wahrscheinlichkeiten übersetzbar; hier: Zeitachse links nach rechts):

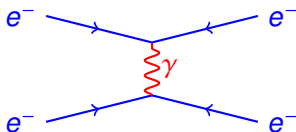


Wahrscheinlichkeit ist

$$\sim g_{em}^2 = \alpha_{em} = \frac{1}{4\pi c \varepsilon_0} \frac{e^2}{\hbar} \approx \frac{1}{137}$$

mit α_{em} der *Feinstrukturkonstante*

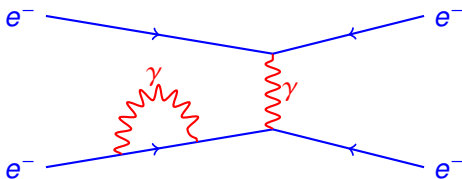
Quantenfeldtheorie: Störungstheorie



Aus Wahrscheinlichkeit größerer und kleinerer Ablenkung folgen **(elektrische) Ladung** und **Masse** der beteiligten Teilchen.

Quantenfeldtheorie: Divergenzen

Problem: Was ist mit komplizierteren Prozessen? Beispielsweise:



Aus Wahrscheinlichkeit größerer und kleinerer Ablenkung folgen wiederum (elektrische) Ladung e und Masse m der beteiligten Teilchen.

Allerdings: **Divergenzen** bei Diagrammen höherer Ordnung, $m \rightarrow \infty$ und $e \rightarrow \infty$, durch „unendlich große Korrekturterme“!

Quantenfeldtheorie: Renormierung

Lösung: Erkenntnis, dass z.B. $m \rightarrow \infty$ nur, wenn die ursprünglich eingesetzte Masse m_0 endlich ist. Wenn stattdessen $m_0 = -\infty$, kann „ m_0 + unendlich große Korrekturen“ zu endlichem Wert m führen.

Unendlichkeiten nicht wohldefiniert – daher zuerst **Regularisierung**: führe Parameter Λ ein, der die Unendlichkeiten unterdrückt, solange $\Lambda \neq 0$. Erst Rechnungen durchführen, anschließend Grenzwert $\Lambda \rightarrow 0$ gehen lassen.

Ergebnis: Konsistente Theorie, allerdings mit freien Parametern (hier messbare e, m), die experimentell bestimmt werden müssen; anschließend können Reaktionsraten berechnet werden.

Quantenfeldtheorien

Quantenfeldtheorien sind die Grundlage der Elementarteilchenphysik:

- **Quantenelektrodynamik** (QED=: Elektromagnetismus, z.B. Lamb-Shift)
- **Quantenchromodynamik** (QCD): Quarks und Gluonen; starke Wechselwirkung; asymptotische Freiheit
- QCD + QED + **Schwache Wechselwirkung**: Standardmodell der Elementarteilchen

Anwendung auf **Gravitation** scheitert: Theorie von Spin-2-Kraftteilchen Graviton nicht renormierbar! Unendlich viele Modifikationen nötig, um Divergenzen zu beseitigen — Theorie verliert jegliche Aussagekraft; unendlich viele Parameter zu bestimmen, bevor Vorhersagen möglich!

Quanten in gekrümmter Raumzeit

Quantenfeldtheorie ist auf Grundlage der speziellen Relativitätstheorie formuliert, Metrik

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Was passiert in gekrümmten Raumzeiten?

(Nota bene: Das ist noch keine Theorie der Quantengravitation – Gravitation dient nur als Hintergrund, hat selbst keine Quanteneigenschaften!)

Quanten in gekrümmter Raumzeit

Motivation: Hawking und andere finden einfache Eigenschaften Schwarzer Löcher:

- 0 Langfristig stellt sich bei einem Schwarzen Loch konstante Oberflächen-Gravitationsbeschleunigung κ ein, bei Schwarzschild
- 1 Die Änderungen der Masse M und der Oberfläche A eines Schwarzen Lochs hängen zusammen wie

$$dM \sim \kappa \cdot dA$$

- 2 Wenn zwei Schwarze Löcher mit Horizontflächen A_1 und A_2 verschmelzen, gilt für die Horizontfläche A_{12} des resultierenden Schwarzen Loches langfristig

$$A_{12} \geq A_1 + A_2$$

Quanten in gekrümmter Raumzeit

Analogie zur Thermodynamik:

- 0 Langfristig hat Schwarzes Loch konstantes κ
- 1 Änderungen Masse M und Oberfläche A :

$$dM \sim \kappa \cdot dA$$

- 2 Kombination von Schwarzen Löchern:

$$A_{12} \geq A_1 + A_2$$

- 0 Im Gleichgewicht hat System eindeutige Temperatur T
- 1 Änderungen innere Energie U und Entropie S :

$$dU = T \cdot dS$$

- 2 Bei Kombination von Systemen gilt immer

$$S_{12} \geq S_1 + S_2$$

Quanten in gekrümmter Raumzeit

Jacob Bekenstein 1974: Was, wenn das nicht nur eine Analogie ist, sondern eine Erweiterung der Thermodynamik?

Masse (mal c^2) als Beitrag zur Energie, Horizontfläche als Beitrag zur Entropie, Oberflächengravitation κ in geeigneten Einheiten als Temperatur des Schwarzen Lochs?

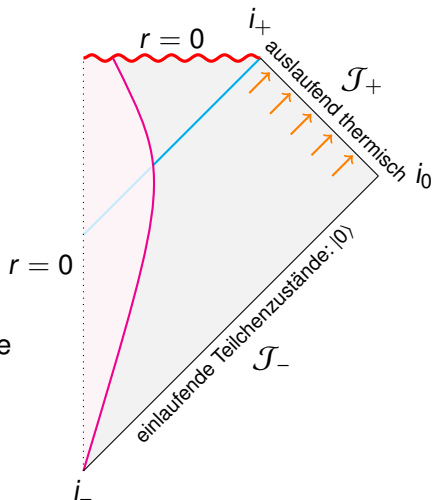
Grundfrage: Alle thermodynamischen Systeme koppeln auch ans elektromagnetische Feld. Können (oder müssen?) Schwarze Löcher **Wärmestrahlung** aussenden? Wenn ja, wie verträgt sich das damit, dass nichts aus einem Schwarzen Loch herauskommt?

Hawking-Strahlung

Hawking 1975 versucht,
Quantenfeldtheorie in
Schwarzschild-Raumzeit zu betreiben.

Definiert einlaufende Zustände im
Unendlichen, insbesondere Vakuum
(keine Teilchen anwesend).

Bereits dort Überraschung: Auslaufende
Zustände enthalten Teilchen, und zwar
mit Energieverteilung einer
Wärmestrahlung!



Hawking-Strahlung

Wärmestrahlung (nur EM) mit Temperatur

$$T_H = \frac{hc^3}{16\pi^2 k_B GM} = 6.2 \cdot 10^{-8} \text{ K} \left(\frac{M_\odot}{M} \right)$$

Nach Stefan-Boltzmann-Formel: Strahlungsleistung ist

$$P = \sigma \cdot A \cdot T^4 = \frac{hc^6}{15 \cdot 2^{11} G^2 \pi^2 M^2} = 10^{-28} \text{ W} \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^2 = 10^6 L_\odot \left(\frac{1 \text{ kg}}{M} \right)^2$$

Spekulationen: Mini-Löcher aus dem frühen Universum (Hawking, Page)? (Aber: nichts gefunden!)

Allerdings nicht in trockenen Tüchern, vgl. kritisch Helfer 2003

Hawking-Strahlung

Naive Rechnung: Abgestrahlte Energie geht dem Schwarzen Loch als Masse verloren:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{P}{c^2} = -\frac{hc^4}{15 \cdot 2^{11} G^2 \pi^2} \frac{1}{M^2}$$

Aufintegrieren:

$$\tau = \frac{5 \cdot 2^{11} G^2 \pi^2}{hc^4} \frac{1}{M^3} = 2 \cdot 10^{67} \text{ a} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^3 = 84 \text{ s} \left(\frac{M}{1000 \text{ t}} \right)^3$$

Hawking-Strahlung

Endliche Lebensdauer von Schwarzen Löchern führt zum

Informationsverlust-Problem:

Wärmestrahlung komplett beschrieben durch einen einzigen Parameter, Temperatur T .

Konfigurationen, Objekte etc. die in das Schwarze Loch hineinfallen beschrieben durch Vielzahl von Parametern.

Ist diese Information verloren? Das würde grundlegenden Prinzipien der Quantentheorie widersprechen.

⇒ Wichtige Frage an alle Kandidaten für Quantengravitations-Theorien

Planck-Skala

Frage nach den kleinsten sinnvollen Längenskalen im Universum:

Quantenmechanik: Teilchen haben eine Wellenlänge, $\lambda = h/p$.
Lokalisierung von Wellen besagt: Genauer als auf λ genau so lässt sich der Ort eines Teilchens nicht festlegen.

Um Teilchen genauer lokalisieren zu können, müssen wir ihnen höheren Impuls \rightarrow höhere Energie erteilen. Im relativistischen Regime wird $E = pc$, also

$$l_{min} = \lambda = \frac{hc}{E} = 1.24 \cdot 10^{-15} \left(\frac{1 \text{ GeV}}{E} \right) m$$

Planck-Skala

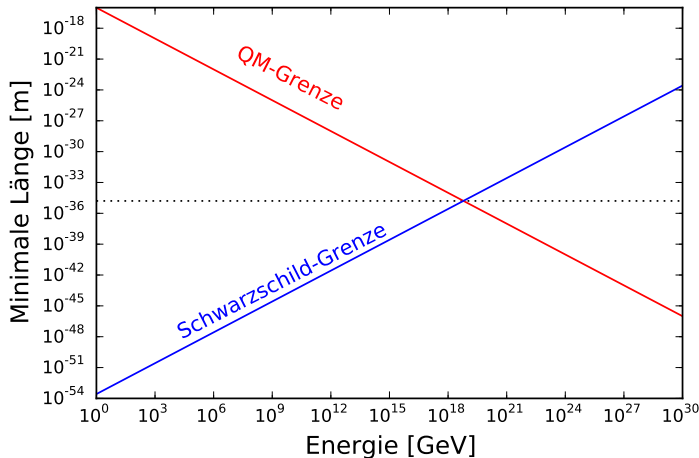
Allgemeine Relativitätstheorie: ein Teilchen mit gegebener Masse bzw. Energie ist allenfalls bis zu einer Genauigkeit von

$$l_{min} = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2GE}{c^4} = 2.65 \cdot 10^{-54} \left(\frac{E}{1 \text{ GeV}} \right) m$$

zu lokalisieren: Schwarzschildradius.

Planck-Skala

Zusammen ergeben beide Effekte eine minimale sinnvolle Länge:



Planck-Skala

Aus dieser Bedingung (bis auf kleine Faktoren): **Planck-Energie**
(mit $\hbar = h/2\pi$):

$$\ell_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.62 \cdot 10^{-35} \text{ m}$$

Planck-Masse bzw. **-energie**:

$$m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 1.22 \cdot 10^{19} \text{ GeV}/c^2 = 2.18 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$$

Planck-Zeit

$$t_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5.34 \cdot 10^{-44} \text{ s}$$

An der Planck-Skala sind sowohl Effekte der QM als der ART wichtig → Quantengravitation! Aber: Weit jeder direkten [z.B. Beschleuniger-]Messungen!

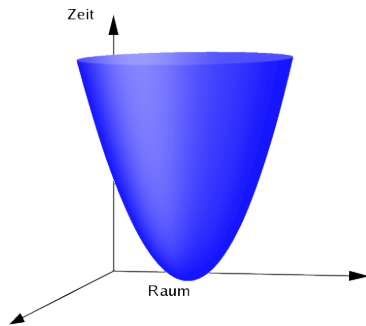
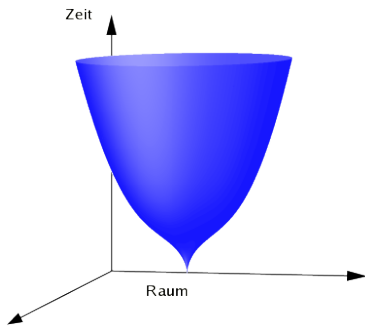
Quantengravitation

Derzeit noch kein allgemein akzeptiertes konsistentes Modell –
trotz 70+ Jahren Suche vieler exzellenter Physiker/innen!

Im folgenden kurz charakterisiert:

- 1 Hartle-Hawking-Quantenkosmologie
- 2 Schleifen-Quantengravitation
- 3 Stringtheorie

Hartle-Hawking-Quantenkosmologie



Wick Rotation: $t \mapsto it$ via $t \mapsto [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]t$ mit $i^2 = -1$

Metrik: $-c^2 dt^2 \mapsto c^2 dt^2$, rein räumliche Metrik!

„Vor dem Urknall“ ist genauso sinnvoll wie „nördlich vom Nordpol“

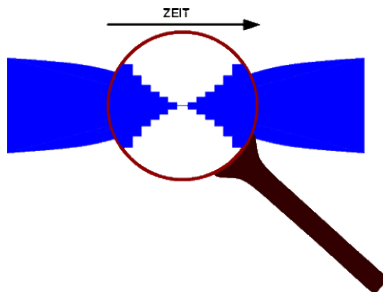
cf. Louko, <http://www.einstein-online.info/vertiefung/QuantenkosmologiePfadintegrale>

Schleifen-Quantengravitation

Rovelli, Smolin, Ashtekar; in D: Thiemann

Geometrische Quantisierung mit geeigneten Variablen analog elektromagnetisches Feld – ergibt Quantenstruktur, aber z.B. keine Störungskorrekturen

Einfache kosmologische Modelle (Bojowald):



Martin Bojowald: *Zurück vor den Urknall*. (2009) und auf *Einstein Online*: <http://www.einstein-online.info/vertiefung/UrknallSprung>

Supergravitation

Supersymmetrie als Erweiterung der Elementarteilchenphysik: Für jedes Materieteilchen (Fermion) ein Kraftteilchen (Boson) gleicher Masse.

Gravitation: Metrik $g_{\mu\nu}$ „Graviton“ und Spin-3/2-Teilchen, Gravitino (Cremmer/Julia 1979, geeicht de Wit/Nicolai 1982)

Einige der Terme, die für Nicht-Renormierbarkeit sorgen fallen dabei weg.

Nicht beliebig erweiterbar; höchste Supersymmetrie in vier Dimensionen ist $N = 8$ — neues Ergebnis 2009: bis zu 4 Schleifen keine Probleme, Unendlichkeiten heben sich weg! (Geniale Tricks reduzieren $\gg 10^5$ herkömmliche Diagramme auf 50 Integrale.) (verständliche Zusammenfassung in Nicolai 2009)

Stringtheorie

Herkunft aus der Elementarteilchenphysik – ersetze Punktteilchen durch eindimensionale Gebilde, „Strings“: Weltflächen. Duale Beschreibung als Felder auf zweidimensionaler Weltfläche!

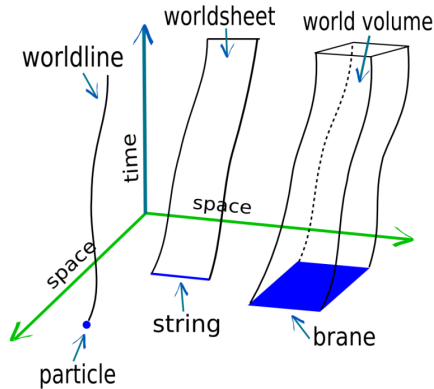
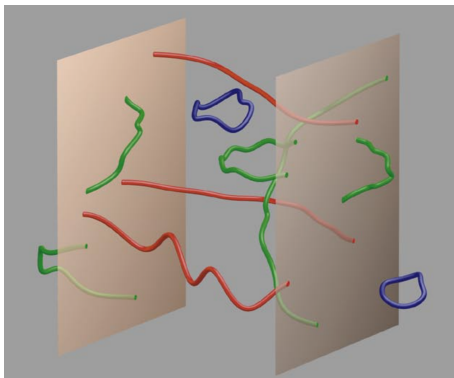


Bild: Stevertigo at en.wikipedia via Wikimedia Commons

Stringtheorie

Innere Schwingungen führen zu unterschiedlichen Massen:
Einheitliche Beschreibung der Elementarteilchen?



Erfordert 9 (oder 10) Raumdimensionen — Möglichkeit von „Branwelten“ (s.o.)
inklusive kosmologischer Modelle (ekpyrotisches Universum)

Einsteins Astrophysik

- 100 Jahre kontinuierliche Fortschritte (nach schleppendem Start)
- Gravitationslinsen: Werkzeug oder Störeffekt
- Kosmologie und kompakte Objekte: Astrophysikalische Modelle!
- Gravitationswellen: Neues Fenster in den nächsten Jahren (?)
- Grenzen: Was sind Dunkle Materie und Dunkle Energie?
- Fundamentale Grenze: Quantengravitation

Prüfung: Terminvereinbarungen bitte direkt mit
bjoern.malte.schaefer@uni-heidelberg.de