Vom Äquivalenzprinzip zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Vom Schwarzen Loch bis zum Urknall: Einsteins Astrophysik für Nicht-Physiker

Markus Pössel & Björn Malte Schäfer

Haus der Astronomie/Institut für Theoretische Astrophysik

12.11.2015

Inhalt

Äquivalenzprinzip

Einstein selbst bezeichnete das Äquivalenzprinzip als seinen „glücklichste[n] Gedanke[n]“:

Wer frei fällt, bekommt keine unmittelbaren Auswirkungen der Gravitation zu spüren!

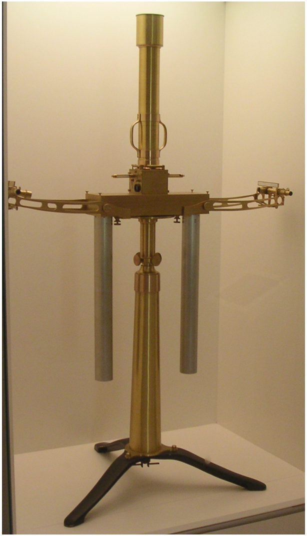
Die zwei verschiedenen Rollen der Masse

Träge Masse m_i vs. schwere Masse (=Gravitationsladung) m_g:

$$F = m_i a \qquad \text{vs.} \qquad F_g = \frac{GMm_g}{r^2}$$

…und offenbar $m_g = m_i$.

Rechts: Nachbildung der Torsionswaage von Eötvös (Einsteinausstellung in Berlin, 2005)



Die zwei verschiedenen Rollen der Masse

Man vergleiche das z.B. mit Coulomb-Kraft:

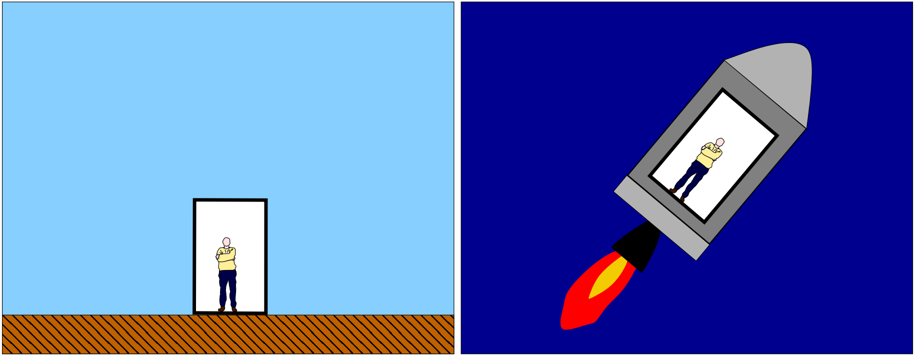
$$F = m_i a \qquad \text{und} \qquad F_C = \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2}$$

...dieser Ausdruck führt dazu, dass die Beschleunigung eines Teilchens mit Ladung q und träger Masse m_i

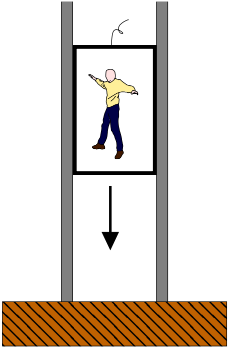
$$a = \frac{q}{m_i} \cdot E(r)$$

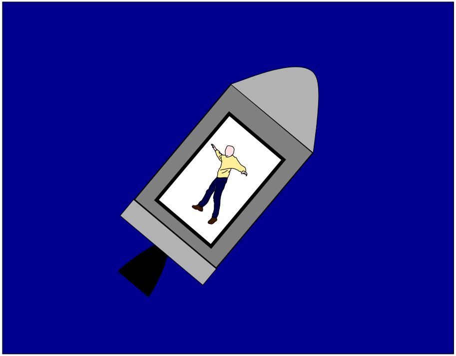
ist mit E einem Ausdruck, der nicht von den intrinsischen Teilcheneigenschaften (allerdings: vom Ort) abhängt (= elektrisches Feld)

Gravitation durch Beschleunigung simulieren



Gravitation durch freien Fall aufheben





Mikrogravitation im freien Fall

Kapsel im Fallturm des
Glenn Research Center.

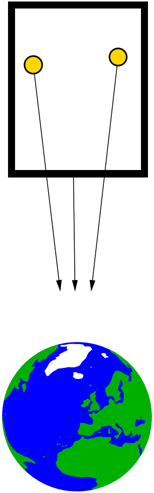
Bild: NASA/GRC/P. Riedel,

A. Lukas

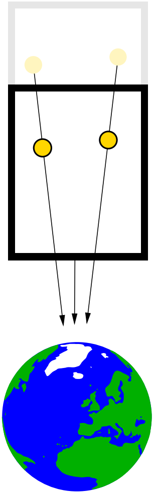
Umlaufbahn = Freier Fall = Mikrogravitation

Chris Hadfield mit Wassertropfen an Bord der ISS. Bild: NASA

Wirklich keine Gravitationswirkungen im freien Fall?



Wirklich keine Gravitationswirkungen im freien Fall?

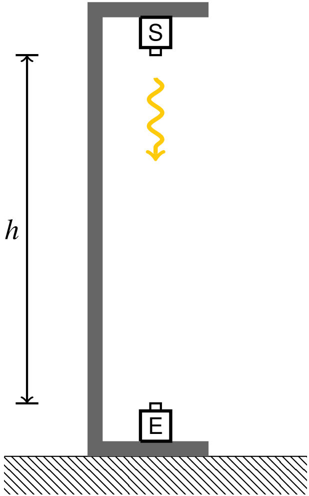


Äquivalenzprinzip

In einem frei fallenden Bezugssystem gilt in einem hinreichend kleinen Raumzeitbereich die Physik der Speziellen Relativitätstheorie

Exakt wird die Aussage für einen infinitesimalen Raumzeitbereich.

Gravitations-Rotverschiebung



Situation: Licht fällt im Schwerefeld der Erde senkrecht nach unten.

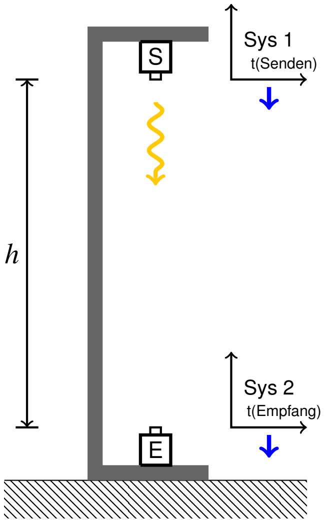
Wellenlängenverschiebung

$$z \equiv \frac{\lambda_E - \lambda_S}{\lambda_S},$$

mit λ_S der Wellenlänge an der Strahungsquelle S, λ_E der Wellenlänge am Empfänger E.

Wie groß ist z, und wovon hängt es ab?

Gravitations-Rotverschiebung: Rechnungsskizze



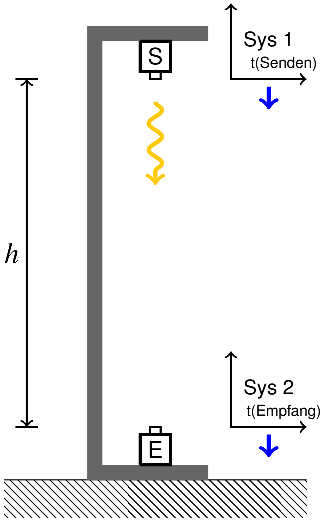
Frei fallende Systeme 1 und 2.

System 1: Im Moment der Lichtaussendung relativ zu Sender S in Ruhe

System 2: Im Moment des Licht<u>empfangs</u> relativ zu Empfänger E in Ruhe

Bestimme Sendefrequenz im Aussendemoment im System 1, Empfangsfrequenz im Empfangsmoment im System 2 (Äquivalenzprinzip - in System 1 ändert sich die Frequenz auf der Reise nicht!)

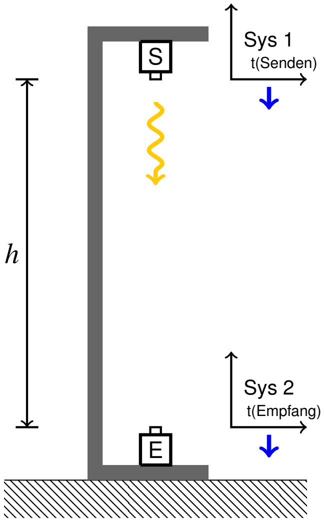
Gravitations-Rotverschiebung: Rechnungsskizze



Vergleich von 1 und 2 im Empfangsmoment: Frequenzen hängen über Dopplereffekt $z = -v/c$ zusammen.

v ist die Geschwindigkeit von System 1 aufgrund von freiem Fall aus der Ruhe über das Zeitintervall h/c hinweg mit konstanter Gravitationsbeschleunigung g, also $v = gh/c$.

Gravitations-Rotverschiebung: Rechnungsskizze



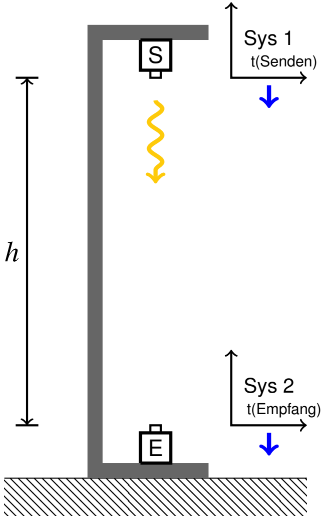
Im konstanten Gravitationsfeld:
Gravitations-Rotverschiebung

$$z = -\frac{gh}{c^2}$$

bei $g \sim 9,81\ \mathrm{m/s}^2$:

$$z = 1{,}1 \cdot 10^{-16} \left(\frac{h}{1\ \mathrm{m}}\right).$$

Gravitations-Rotverschiebung: Rechnungsskizze



Allgemeiner: Gravitationspotenzial $\Phi(r)$:

$$v \approx a \cdot \Delta t = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\Delta t \approx \frac{\Delta\Phi(r)}{\Delta r}\Delta t$$

$$= \frac{\Delta\Phi(r)}{c}$$

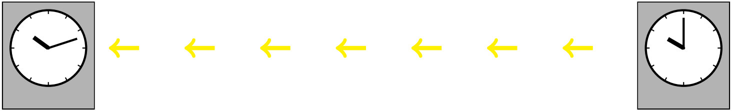
wobei wir ausgenutzt haben, dass $\Delta r = h = c\Delta t$ (Lichtsignal!) Folglich

$$z = -\frac{\Delta\Phi}{c^2}$$

mit $\Delta\Phi = \Phi(r_S) - \Phi(r_E)$.

Rotverschiebung und Gang von Uhren

Uhren vergleichen mithilfe von Lichtsignalen: Rotverschiebung (diesmal nicht für Frequenz der Lichtwellen, sondern der aufeinanderfolgenden Signale!)



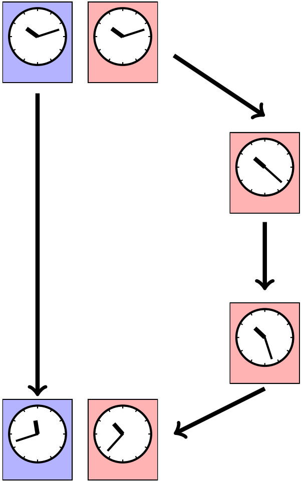
Statische Situation: Lichtsignale sollten von der einen zur anderen Uhr immer die gleiche (Koordinaten-)Zeit benötigen ⇒ „Transport von Zeitintervallen“

Vergleich der Zeitintervalle (die Gravitations-Rotverschiebung erleiden!) mit lokalen Uhren setzt deren Zeit zueinander in Beziehung.

Rotverschiebung und Gang von Uhren

Uhrentransport: von A nach B, in B lange laufen lassen, von B zurück nach A, dort direkter Vergleich mit zurückgelassener Referenzuhr.

Führe die Uhrentransport-Messung mehrmals durch; einziger Unterschied: wie lange die transportierte Uhr am Ort ihres Zwischen-Aufenthalts ruht. Das erlaubt es, Effekte des Transports abzuziehen!



Rotverschiebung und Gang von Uhren

Sei ν_1 die Tick-Frequenz aller unserer Standarduhren. Sei eine dieser Uhren am Punkt 1 im Gravitationspotential, Radialkoordinate r_1. Von einem Ort 2 gesehen (Lichtsignal läuft radial nach außen nach $r_2 > r_1$) tickt die tieferliegende Uhr dann mit Frequenz ν_2, wobei

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 1 - \frac{\Phi(r_2) - \Phi(r_1)}{c^2} = 1 + \frac{GM}{c^2}\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right] = 1 + \frac{GM}{c^2}\left[\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}\right] < 1,$$

also mit geringerer Frequenz: Uhren tiefer im Gravitationsfeld gehen langsamer!

Rotverschiebung und Gang von Uhren

Ausgedrückt über die Metrik:

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}\tau^2 = -c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2.$$

Sprich: Der Faktor, der Zeitkoordinaten-Zeit und Eigenzeit der Uhr (τ) verknüpft, hängt jetzt vom Ort ab!

Rotverschiebung und Gang von Uhren

Um zu sehen, dass die Metrik tatsächlich das richtige Ergebnis liefert:

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}\tau^2 = -c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2.$$

Unveränderlichkeit (Statik) der Situation: Lichtsignale, die Δt nacheinander ausgesandt werden, werden auch Δt nacheinander empfangen!

Welchem Eigenzeit-Intervall das Δt entspricht, hängt aber von der Position der Uhr ab:

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}\,\mathrm{d}t \approx \left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right)\mathrm{d}t$$

(Näherung möglich, da $2GM/c^2 r \ll 1$.)

Rotverschiebung und Gang von Uhren

Sprich: Für unsere beiden Uhren $1, 2$ an Orten r_1 und r_2 gilt

$$d\tau_1 = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r_1}\right) dt$$

und

$$d\tau_2 = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r_2}\right) dt$$

also

$$\frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{1 - \frac{GM}{c^2 r_1}}{1 - \frac{GM}{c^2 r_2}} \approx 1 - \frac{GM}{c^2 r_1} + \frac{GM}{c^2 r_2} = \frac{\nu_2}{\nu_1}$$

...und das ist der Ausdruck, den wir bereits hatten!

Trödel-Mechanik I

Mechanisches Grundgesetz (Trägheitsgesetz) neu formuliert:

1. Kräftefreie Teilchen bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang gerader Bahnen
2. Die Weltlinien kräftefreier Teilchen sind Raumzeitgeraden
3. Kräftefreie Teilchen bewegen sich so, dass entlang ihrer Weltlinien maximal viel Eigenzeit vergeht

. . . letzteres hatte ich als **Trödelprinzip** bezeichnet.

Trödel-Mechanik II

Andererseits hatten wir aus dem Äquivalenzprinzip abgeleitet: Uhren gehen umso langsamer, je tiefer sie in einem Gravitationsfeld stecken.

Das sollte auch die Eigenzeit bewegter Uhren beeinflussen!

Schlüsselgröße, um das zu beschreiben: Raumzeit-Metrik!

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}\tau^2 = -c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2.$$

Trödel-Mechanik III

Einfacher Ansatz in der Nähe der Erdoberfläche:

$$\frac{GM}{r} = \frac{GM}{(r_\oplus + h)} = \frac{GM}{r_\oplus}\frac{1}{1+h/r_\oplus} \approx \frac{GM}{r_\oplus}\left(1-\frac{h}{r_\oplus}\right) = \frac{GM}{r_\oplus} + gh$$

mit

$$g \equiv \frac{GM}{r_\oplus^2}.$$

Damit wird die Metrik bei Beschränkung auf die x-Richtung (oben-unten) näherungsweise:

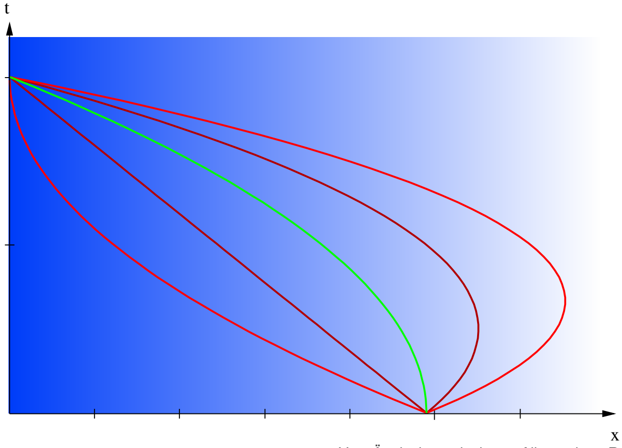
$$\mathrm{d}\tau^2 = (e + d\cdot x)\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2/c^2$$

mit Konstanten d, e.

Trödel-Mechanik IV

Linearer Ansatz, wie gerade begründet:

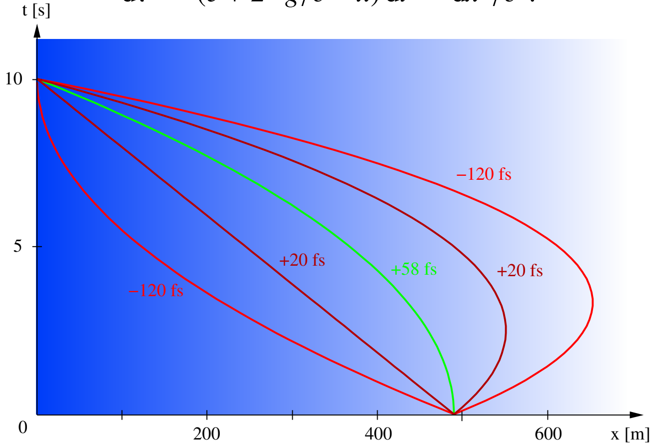
$$d\tau^2 = (e + d \cdot x)\, dt^2 - dx^2/c^2.$$



Trödel-Mechanik V

Konkret mit Erdbeschleunigung:

$$d\tau^2 = (e + 2 \cdot g/c^2 \cdot x)\, dt^2 - dx^2/c^2.$$



…man bekommt die richtige Fallparabel.

Trödel-Mechanik

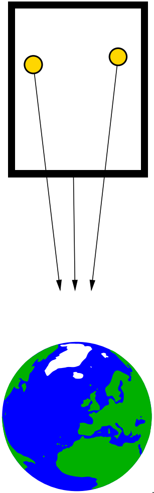
Im externen Gravitationsfeld lässt sich das Verhalten von Testteilchen durch das Trödelprinzip reproduzieren:

1. ~~Kräftefreie Teilchen bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang gerader Bahnen~~
2. ~~Die Weltlinien kräftefreier Teilchen sind Raumzeitgeraden~~
3. Kräftefreie Teilchen bewegen sich so, dass entlang ihrer Weltlinien maximal viel Eigenzeit vergeht

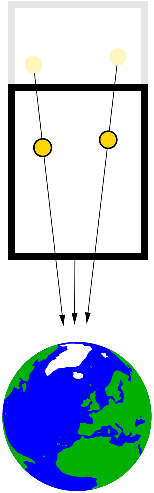
Erstes Beispiel bei uns für **Mechanik via Metrik**!

Von Gezeitenkräften zur ART

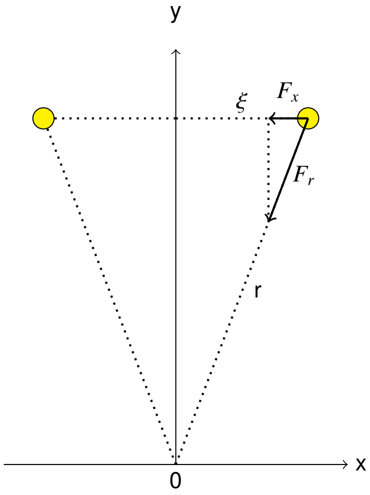
Wir hatten schon gesehen: Reste von Schwerkraft im freien Fall!



Reste von Schwerkraft im freien Fall



Gezeitenkräfte



$$F_x = \frac{\xi}{r} \cdot F_r$$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{GMm}{r^3} \cdot \xi$$

Stärke der Gezeitenkraft fällt schneller ab als $1/r^2$!

Grenzen des freien Falls, diesmal

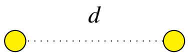
Unser Beispiel ist repräsentativ insofern, als Gezeitenkraft proportional zum Abstand zwischen zwei Körpern, $F \sim \xi$

Wartet man lange genug, sieht man Effekte auch für kleines ξ.

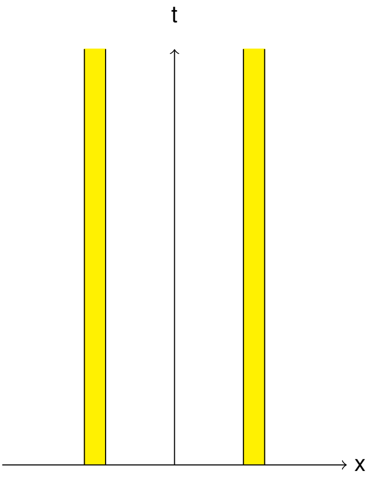
Das bewirkt die anfangs bereits erwähnten Grenzen des freien Falls, und daher lautet das Einstein'sche Äquivalenzprinzip nun einmal: In einer infinitesimal kleinen Raumzeitregion sind die Gesetze der Physik, formuliert in einem frei fallenden Bezugssystem, die gleichen wie in Abwesenheit von Gravitation.

In der Praxis: Für hinreichend kleine „Fahrstuhlkabinen" sind die Gezeiteneffekte über hinreichend kleine Zeiträume nicht nachweisbar.

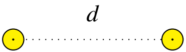
Raumzeit-Bild: Kugeln im Weltraum



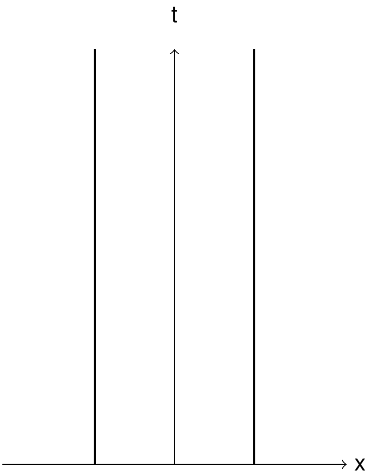
Raumzeitdiagramm dazu: siehe rechts.



Raumzeit-Bild: Kugeln im Weltraum

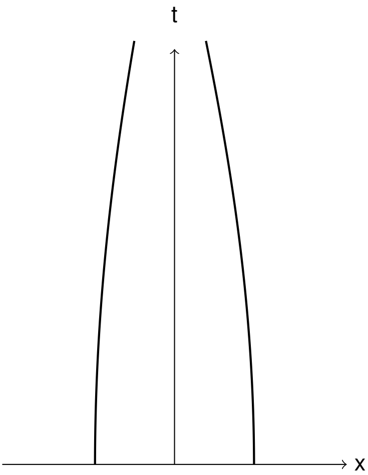


Raumzeitdiagramm
(vereinfachte Version)



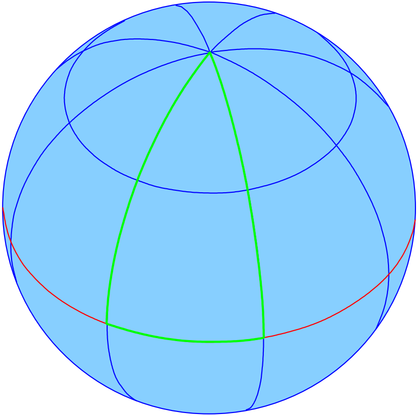
Raumzeitdiagramm: Kugeln im freien Fall

Ursprünglich sind die Weltlinien parallel. Dann konvergieren sie!



... was sind demnach Weltlinien für freien Fall?

Wie im Beispiel konvergieren (oder divergieren) Weltlinien für den freien Fall, selbst wenn sie ursprünglich parallel sind. Geometrische Analogie:



Legt Analogie mit gekrümmten Oberflächen nahe!

Keine Kräfte: Gerade Weltlinien	Geradestmögliche Kurven in der Ebene: Geraden(abschnitte)
Freier Fall in Anwesenheit von Masse: Weltlinien können konvergieren/divergieren	auf gekrümmter Oberfläche: geradestmögliche Kurven können konvergieren/divergieren
Äquivalenzprinzip	infinitesimaler Ausschnitt aus gekrümmter Fläche sieht flach aus

Einsteins Feldgleichungen: Was uns noch fehlt

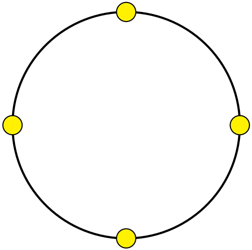
Jetzt fehlt nur noch (?) die Verknüpfung von Gezeitenkräften = Krümmung mit der Anwesenheit von Masse.

Dazu holen wir uns Anregungen bei Newton und bei der Speziellen Relativitätstheorie.

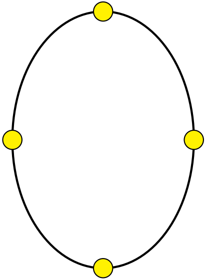
Was machen Gezeitenkräfte?

Gezeitenkräfte <u>verformen</u> Ansammlungen fallender Teilchen (die zwei Kugeln im Fahrstuhlbeispiel rücken näher zusammen).

Aus



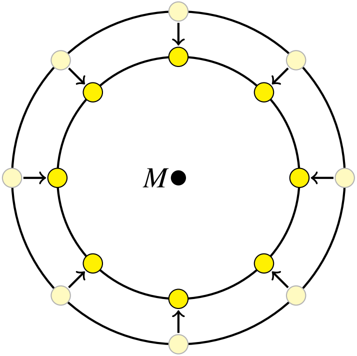
wird



...bei zunächst gleichbleibendem Volumen.

Was machen Gezeitenkräfte?

Gezeitenkräfte rund um eine kugelsymmetrische herum: Teilchen, die zu Beginn der Betrachtung in Ruhe sind, beginnen in Richtung auf das Zentrum hin zu beschleunigen:



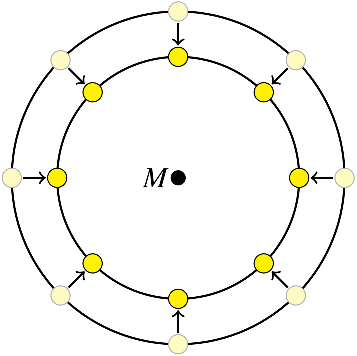
Volumen ist

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Änderung mit der Zeit ist

$$\dot{V}\Big|_{t=0} = 4\pi r^2 \, \dot{r}\Big|_{t=0} = 0.$$

Was machen Gezeitenkräfte?



Beschleunigte Änderung zur Zeit $t = 0$ (Teilchen beginnen Bewegung) ist

$$\begin{aligned} \ddot{V}\Big|_{t=0} &= 4\pi\left(r^2\,\ddot{r} + 2r(\dot{r})^2\right)\Big|_{t=0} \\ &= 4\pi r^2\,\ddot{r} = -4\pi\,G\,M \end{aligned}$$

wobei wir die Newton'sche Schwerebeschleunigung eingesetzt haben,

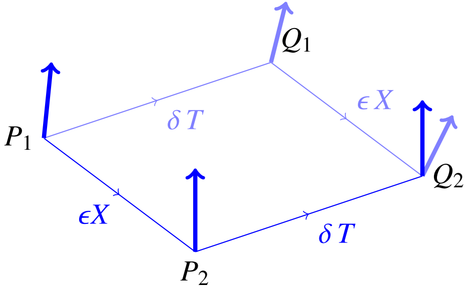
$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}.$$

Relative Beschleunigung: $\left.\dfrac{\ddot{V}}{V}\right|_{t=0} \quad = \quad -4\pi G\,\rho,$

mit $\rho \equiv M/V$ der mittleren Dichte im betrachteten Volumen.

Weltlinien-Betrachtung Gezeitenkräfte

Paralleltransport entlang geschlossener Kurve



Anfangssituation: Zwei ruhende Teilchen bei (t, x^i) und $(t, x^i + \epsilon X^i)$. Paralleltransport des Geschwindigkeitsvektors $v \propto T$ des Teilchens von P_1 aus nach Q_2; Differenz ist relative Beschleunigung der beiden Teilchen am Ende des kurzen Zeitintervalls δ.

Weltlinien-Betrachtung Gezeitenkräfte

Ergebnis: Beschleunigung ist

$$a^\mu = \frac{v^\mu(P_1 \to Q_1 \to Q_2) - v^\mu(P_1 \to P_2 \to Q_2)}{\delta} = \epsilon R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T^\nu X^\rho T^\sigma$$

mit $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ den Komponenten des Riemann'schen Krümmungstensors.

Gezeitenwirkung: Betrachte Ellipsoid aus zunächst ruhenden Teilchen (der zunächst eine Kugel sein kann) mit Radien r_1, r_2, r_3 und Volumen

$$V = \frac{4}{3}\pi r_1 r_2 r_3.$$

Wie verändert sich das Volumen des Ellipsoiden mit der Zeit?

Weltlinien-Betrachtung Gezeitenkräfte

$$\dot{V} = \frac{4}{3}\pi(\dot{r}_1 r_2 r_3 + r_1 \dot{r}_2 r_3 + r_1 r_2 \dot{r}_3)$$

$$\ddot{V} = \frac{4}{3}\pi(\ddot{r}_1 r_2 r_3 + r_1 \ddot{r}_2 r_3 + r_1 r_2 \ddot{r}_3) + \text{Terme proportional zu } \dot{r}_i.$$

$$\frac{\ddot{V}}{V} = \frac{\ddot{r}_1}{r_1} + \frac{\ddot{r}_2}{r_2} + \frac{\ddot{r}_3}{r_3}.$$

Mit Anfangsgeschwindigkeit Null gelte für die Teilchen:

$$r_i(t) = \epsilon + \frac{1}{2}a_i t^2.$$

Dann ist

$$\frac{\ddot{r}_i}{r_i} = \frac{a_i}{\epsilon} = R^i_{i\nu\rho}T^\nu T^\rho = R^i_{\nu i\rho}T^\nu T^\rho = R^i{}_{tit}$$

Weltlinien-Betrachtung Gezeitenkräfte

$$\frac{\ddot{V}}{V} = \sum_{i=1}^{3} R^{i}{}_{tit} \equiv Ric_{tt} = -4\pi G\rho$$

...und weil in der speziellen Relativitätstheorie auch Energie und Ipuls eine Rolle spielen, kommt man letztlich auf

$$Ric_{tt} = -\frac{4\pi G}{c^2}(\rho_E + P_x/c^2 + P_y/c^2 + P_z/c^2).$$

Das ist (von ein paar Feinheiten abgesehen Einsteins Gleichung, wie Energie/Druckinhalt einer Raumzeit Gezeitenkräfte und damit Raumzeitkrümmung erzeugen.

John C. Baez & Emory F. Bunn, Am. J. Phys. **73** (2005), 644-652;

http://arxiv.org/abs/gr-qc/0103044

Einsteingleichungen

Vollständige Form der Gleichungen:

$$G_{\mu\nu} = Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

mit $G_{\mu\nu}$ dem Einstein-Tensor und $T_{\mu\nu}$ dem Energie-Impuls-Tensor.

Das allermeiste, was noch folgt, wird sein: Finde interessante Raumzeiten (Metriken), die diese Gleichung erfüllen. Finde in diesen Raumzeiten die Geodäten: Bahnen frei fallender Teilchen und Lichtausbreitung.