

Was genau expandiert im Universum?

Thomas Sperling, Jena

Abstract: In diesem Artikel wird auf Grundlage der Newtonschen Physik untersucht, inwiefern Atome oder das Sonnensystem an der kosmologischen Expansion teilhaben. Anhand einer Diskussion eines korrigierten effektiven Potenzials kann gezeigt werden, dass weder Atome noch unser Sonnensystem expandieren.

1 Einleitung

Hört man zum ersten Mal etwas von der Expansion des Universums, so kann eine Reihe von Fehlvorstellungen entstehen. In dem Film *Der Stadtneurotiker* wird gleich in der ersten Szene eine solche dargestellt. Dort sieht man einen verängstigten Jungen, der gelesen hat, dass das Universum expandiert, mit seiner Mutter beim Psychiater. Es entsteht folgender Dialog:

Sohn: *Das Universum expandiert... das Universum ist alles und wenn es expandiert, wird es eines Tages auseinander brechen und das wäre das Ende von Allem!*

Mutter: *Du bist jetzt in Brooklyn. Brooklyn expandiert nicht!*

Hat die Mutter, die in dieser Situation nur beruhigend und ohne genaueres Wissen von der Expansion des Universums auf den Jungen einredet, eigentlich recht? Nehmen zum Beispiel Atome oder unser Sonnensystem an der kosmologischen Expansion teil? Oder expandieren diese Systeme nur im geringeren Maße als der Rest des Universums? Diese Fragen gilt es in diesem Artikel zu beantworten.

2 Newtonsches Modell

Um die obige Frage beantworten zu können, muss man streng genommen die Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie in Betracht ziehen. Jedoch sind diese mathematisch weitaus komplexer als die klassischen Bewegungsgleichungen der Newtonschen Physik. Ziel dieses Artikels soll es daher sein, ein geeignetes physikalisches Modell im Rahmen der Newtonschen Physik zu finden, das eine Aussage über die Expansion von Atomen oder gravitativ gebundenen Systemen wie das Sonnensystem macht.

2.1 Die zwei interessanten Systeme

Will man wissen, welche Auswirkungen die kosmologische Expansion auf komplexe physikalische Systeme (Mehrkörperprobleme) wie das Sonnensystem oder Atome haben, so erscheint es sinnvoll, sich zunächst zu fragen, welche Auswirkungen die Expansion auf das klassische Zweikörperproblem der Mechanik hat. Sowohl

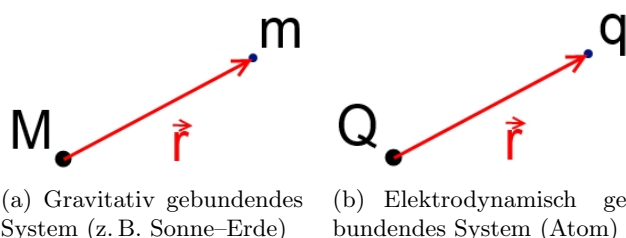
gravitativ gebundene Systeme wie das Sonnensystem (Abb. 1a) als auch das Wasserstoffatom (Abb. 1b) lassen sich durch die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{C}{r^2} \cdot \vec{e}_r \quad (1)$$

mit

$$C_{grav} = G \cdot M \quad , \quad C_{el} = \frac{|Q \cdot q|}{4\pi\epsilon_0 \cdot m_{el}}$$

beschreiben. Diese Bewegungsgleichung muss nun durch die kosmologische Expansion korrigiert werden.



(a) Gravitativ gebundenes System (z. B. Sonne-Erde) (b) Elektrodynamisch gebundenes System (Atom)

Abbildung 1: Das Zweikörperproblem der Mechanik

2.2 Kosmologische Korrektur

Die kosmologische Expansion des Raumes kann man sich in der Newtonschen Physik zunächst als eine zusätzliche Beschleunigung denken, die auf die beiden Massen wirkt. Es sind daher die Bewegungsgleichungen (1) durch

$$\ddot{\vec{r}}_{neu} = \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{r}}_{cosm} \quad (2)$$

zu korrigieren. Um den Ausdruck für $\ddot{\vec{r}}_{cosm}$ zu finden, betrachte man das Hubble-Gesetz

$$\dot{r}_{cosm} = H(t) \cdot r = \frac{\dot{a}}{a} \cdot r \quad (3)$$

mit $H(t)$ als zeitabhängigen Hubbleparameter und $a(t)$ als Skalenfaktor. Da in Gleichung (2) zweite Ableitungen nach der Zeit vorkommen, ist es plausibel, Gleichung (3) einmal nach der Zeit abzuleiten. Dann folgt

$$\begin{aligned} \ddot{r}_{cosm} &= \dot{H}(t) \cdot r + \dot{r} \cdot H(t) \\ &= \frac{\ddot{a} \cdot a - \dot{a}^2}{a^2} \cdot r + \dot{r} \cdot \frac{\dot{a}}{a} \\ &= \frac{\ddot{a}}{a} \cdot r \quad . \end{aligned} \quad (4)$$

Wegen der Isotropie des Hubble-Gesetzes kann man mit Gleichung (4) den Ausdruck

$$\ddot{\vec{r}}_{cosm} = \frac{\ddot{a}}{a} \cdot r \cdot \vec{e}_r \quad (5)$$

für die vektorielle Beschleunigung finden. Mit den Gleichungen (1), (2) und (5) folgt damit unmittelbar, dass der Drehimpuls $L = m \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi}$ erhalten bleibt, da

$$\ddot{\vec{r}}_{neu} = f(r, t) \cdot \vec{e}_r \quad (6)$$

ist (*Zentralkraftfeld*). In Polarkoordinaten (r, φ) lautet damit die Bewegungsgleichung in radialer Richtung

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{m^2 \cdot r^3} - \frac{C}{r^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \cdot r \quad (7)$$

2.3 Entwicklung von $a(t)$

Der genaue zeitliche Verlauf von $a(t)$ sei zunächst unbekannt. Daher wird der Term $\frac{\ddot{a}}{a}$ in Gleichung (7) in eine Taylorreihe entwickelt. Es ist

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} \cdot (t - t_0)^2 + \dots \quad (8)$$

mit

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}, \quad q_0 = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{H_0^2 \cdot a(t_0)} \quad (9)$$

Bricht man bei dem linearen Glied der Entwicklung ab, so erhält man den dominierenden¹ Term zu

$$\frac{\ddot{a}}{a} \approx -q_0 \cdot H_0^2 = \text{const} \quad (10)$$

Setzt man dies als Näherungsausdruck in Gleichung (7) ein, so erhält man

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{m^2 \cdot r^3} - \frac{C}{r^2} - q_0 \cdot H_0^2 \cdot r \quad (11)$$

2.4 Diskussion am effektiven Potenzial

Mit der Gleichung (11) lässt sich die korrigierte Beschleunigung (Gleichung (6)) als

$$\ddot{\vec{r}}_{neu} = f(r) \cdot \vec{e}_r \quad (12)$$

darstellen. Die effektiv wirkende Kraft ist damit eine *konservative* Zentralkraft und daher gilt neben der Drehimpulserhaltung auch Energieerhaltung ($E_{ges} = \text{const}$). Eine Multiplikation von (11) mit \dot{r} und anschließender Intergration über die Zeit ergibt

$$E_{ges} = \frac{\dot{r}^2}{2} + U_{eff}(r) \quad (13)$$

mit

$$U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2 \cdot m^2 \cdot r^2} - \frac{C}{r} + \frac{q_0 \cdot H_0^2}{2} \cdot r^2 \quad (14)$$

Die Bewegung des betrachteten Körpers (Elektron oder Erde) kann nun qualitativ an $U_{eff}(r)$ in Form einer Kurvendiskussion geschehen. Durch Vorgabe einer gewissen Energie E_0 des Teilchens (eine Parallele zur Abszisse) können so zum Beispiel gebundene und ungebundene Zustände charakterisiert werden. Im Keplerproblem ergeben sich die bekannten Kegelschnitte als mögliche Bahnformen (Abb. 2). Da der Verzögerungsparameter q_0 nach heutiger Erkenntnis $-1/2$ ist, hat der Korrekturterm, der durch die kosmologische Expansion hervorgerufen wird, die Gestalt eines umgedrehten harmonischen Oszillators ($\sim -r^2$). Dieses effektive Potenzial muss daher nun diskutiert werden:

$$U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2 \cdot m^2 \cdot r^2} - \frac{C}{r} - \frac{H_0^2}{4} \cdot r^2 \quad (15)$$

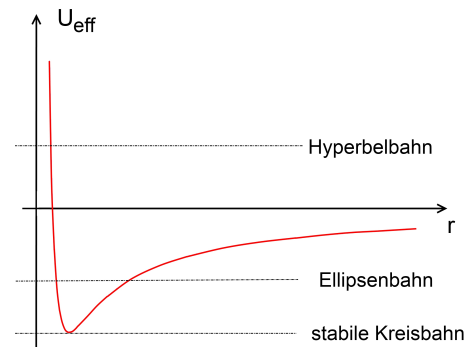


Abbildung 2: Normales effektives Potenzial

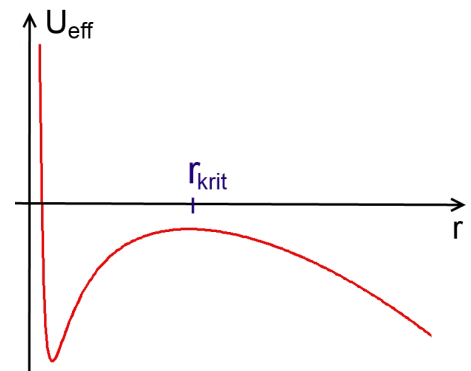


Abbildung 3: Effektives Potenzial unter Berücksichtigung einer kosmologischen Expansion

¹Die Zeitabhängigkeit von $f(t) := \frac{\ddot{a}}{a}$ ist vernachlässigbar in den betrachteten Systemen. Um dies einzusehen, betrachte man die relative zeitliche Veränderung von $f(t)$. Diese ist gegeben durch $\frac{\dot{f}}{f}$. Für ein exponentiell expandierendes Universum ($a(t) \sim e^{\lambda \cdot t}$) ist sie null. Für ein strahlungs- ($a(t) \sim t^{1/2}$) bzw. materiedominiertes ($a(t) \sim t^{3/2}$) Universum ist $\frac{\dot{f}}{f} \sim H$, das heißt proportional zum inversen Alter des Universums. Für das System Erde-Sonne ist die typische Zeitskala die Umlaufdauer um die Sonne (ein Jahr). Das Universum hingegen ist etwa 10^{10} Jahre alt, also liegen etwa 10 Größenordnungen dazwischen. Daher ist auch der relative Fehler, den man macht, wenn man $f(t)$ als konstant betrachtet, in der Größenordnung von 10^{-10} . Für Atome ist er sogar noch kleiner.

Es kommt zu einer Herausbildung eines Maximums (*labiles* Gleichgewicht) bei einem gewissen kritischen Radius r_{krit} (Abb. 3). In dieser Entfernung ist die kosmologische Expansionsbeschleunigung vergleichbar mit der gravitativen respektive elektromagnetischen Anziehung zwischen den beiden Teilchen. Für $r < r_{krit}$ dominiert die Anziehungskraft zwischen den Teilchen und die Teilchen bleiben gebunden. In diesem Zustand nehmen sie überhaupt nicht an der Expansion teil. Für $r > r_{krit}$ ist hingegen die kosmologische Expansion zwischen den Teilchen dominierend und die Teilchen driften mit der Zeit unendlich weit auseinander.

2.5 Der kritische Radius

Um r_{krit} zu bestimmen, kann man die erste Ableitung von $U_{eff}(r)$ null setzen (Bestimmung des Maximums) und nach r umstellen. Dies würde auf eine Gleichung vierten Grades in r führen. Für eine bloße Abschätzung von r_{krit} reicht es bereits aus, zu fragen, wann die beiden Terme $-\frac{C}{r}$ und $-\frac{H_0^2}{4} \cdot r^2$ in Gleichung (15) in etwa gleich sind. Dies gilt offensichtlich bei:

$$r_k \approx \left(\frac{4 \cdot C}{H_0^2} \right)^{1/3} . \quad (16)$$

Für die zwei betrachteten Systeme ergeben sich damit folgende Werte:

$$r_k^{grav} \approx \left(\frac{4 \cdot G \cdot M}{H_0^2} \right)^{1/3} \approx \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/3} \cdot 120 \text{ pc} , \quad (17)$$

$$r_k^{el} \approx \left(\frac{|Q \cdot q|}{2\pi\epsilon_0 \cdot m_{el} \cdot q_0 \cdot H_0^2} \right)^{1/3} \approx 30 \text{ AE} . \quad (18)$$

Betrachtet man zum Beispiel unser Sonnensystem ($M = 1 M_\odot$), so müsste die Erde 120 pc von der Sonne entfernt sein, um von der kosmologischen Expansion betroffen zu sein. Nimmt man als anderes Beispiel das System bestehend aus der Milchstraße ($M_{Gal} \approx 10^{12} M_\odot$) und der Andromedagalaxie, so führt dies auf einen kritischen Radius von $r_k \approx 1,2 \text{ Mpc}$. Die Andromedagalaxie ist rund 0,7 Mpc von der Milchstraße entfernt und kann sich daher aufgrund ihrer Eigenbewegung auf uns zu bewegen. Für ein Atom müsste nach derselben Überlegung das Elektron 30 AE vom Kern entfernt sein, um mit zu expandieren – dies entspräche ungefähr der Neptunbahn in unserem Sonnensystem!

Anmerkung: Der Abbruch der Taylorentwicklung beim linearen Glied (Gleichung (10)) entspricht einer exponentiellen Expansion ($a(t) \sim e^{\lambda t}$) des Universums. Denn aus

$$a(t) = K \cdot e^{\lambda t} , \quad K, \lambda > 0 \quad (19)$$

folgt unmittelbar

$$\ddot{a}(t) = K \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} \quad (20)$$

und damit

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \lambda^2 = \text{const} . \quad (21)$$

3 Die Untersuchung mit MATLAB

Die Bewegungsgleichung (11) kann mit MATLAB numerisch gelöst werden. Um die Überlegungen über das effektive Potenzial zu bestätigen, soll dies nun kurz vorgeführt werden. Zunächst wird die Bewegungsgleichung dimensionslos gemacht.

3.1 Die dimensionslose Bewegungsgleichung

Um die Bewegungsgleichung

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{m^2 \cdot r^3} - \frac{C}{r^2} + \frac{H_0^2}{2} \cdot r \quad (22)$$

dimensionslos zu machen, werden die Variablen r und t auf natürliche Maßstäbe ($r_0; T_0$) skaliert. Der Ansatz lautet

$$x := \frac{r}{r_0} , \quad \tau := \frac{t}{T_0} . \quad (23)$$

Setzt man dies in (22) ein, so erhält man

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{L^2 \cdot T_0^2}{m^2 \cdot r_0^4} \cdot \frac{1}{x^3} - \frac{C \cdot T_0^2}{r_0^3} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{H_0^2}{2} \cdot T_0^2 \cdot x . \quad (24)$$

Nun kann man die eingeführten Parameter so wählen, dass

$$\frac{L^2 \cdot T_0^2}{m^2 \cdot r_0^4} = 1 , \quad \frac{C \cdot T_0^2}{r_0^3} = 1 \quad (25)$$

gilt. Damit folgt:

$$r_0 = \frac{L^2}{m^2 \cdot C} , \quad T_0 = \frac{L^3}{m^3 \cdot C^2} . \quad (26)$$

Nun wird auch klar, was die natürlichen Maßstäbe im physikalischen System sind – der Einheitsabstand ist gerade die große Halbachse im ungestörten Keplerproblem und die Einheitszeit ist proportional zur Keplerperiode

$$T_k = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r_0^3}{C}} = 2\pi \cdot T_0 . \quad (27)$$

In dimensionslosen Einheiten nimmt Gleichung (22) damit die Gestalt

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{H_0^2}{2} \cdot T_0^2 \cdot x . \quad (28)$$

an. Führt man den ebenfalls dimensionslosen Parameter

$$\alpha := H_0 \cdot T_0 \quad (29)$$

ein, so bleibt die zu lösende Differentialgleichung

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{\alpha^2}{2} \cdot x \quad (30)$$

Diese kann nun in MATLAB implementiert werden.

Anmerkung: Führt man diese Skalierung in das effektive Potenzial (Gleichung (15)) ein, so erhält man in Abhängigkeit von α die in Abb.6 dargestellten Graphiken.

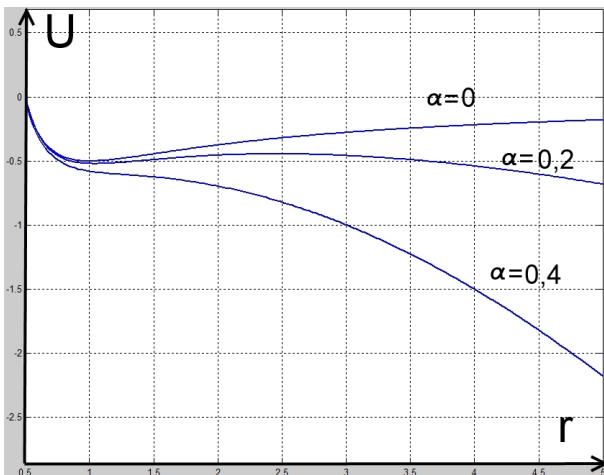


Abbildung 4: Das effektive Potenzial in Abhängigkeit verschiedener Werte für α

4 Matlabimplementierung

Um einen Vergleich mit dem ungestörten Problem (ohne Berücksichtigung der Expansion) zu erhalten, sei zunächst der Fall $\alpha = 0$ kurz dargestellt.

4.1 Problem ohne Kosmologische Expansion

Eine numerische Lösung von Gleichung (30) mit $\alpha = 0$ kann wie in Abb.5 dargestellt aussehen. Es entspricht einer Keplerellipse. Aber auch ungebundene Zustände (Hyperbel, Parabel) können durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen erzeugt werden (Abb.6).

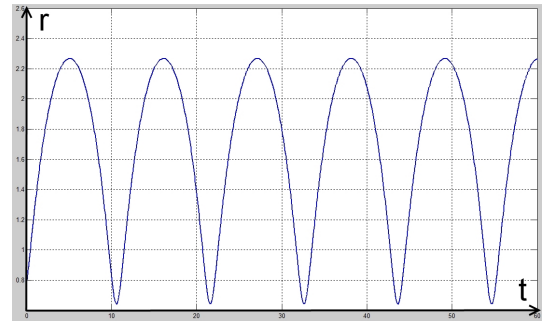


Abbildung 5: ungestörte Keplerellipse

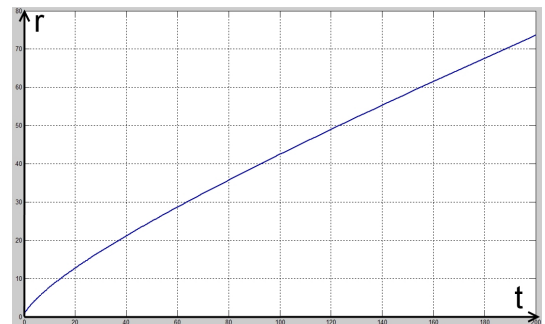


Abbildung 6: Hyperbelbahn

4.2 Problem mit kosmologische Expansion

Um den Einfluss der kosmologischen Expansion zu untersuchen, sei $\alpha = 0.1$ gewählt. Löst man nun Gleichung (30) mit MATLAB, so ergeben sich abhängig von den Startparametern unterschiedliche Graphen. Um das Vorhandensein des kritischen Abstandes zu verifizieren, wird in der Anfangsbedingung nur der Startort sukzessive vergrößert (Abb.7–9). Erst bei einem kritischen Anfangsabstand von etwa 4,66 nimmt das System an der Expansion teil und fliegt auseinander (Abb.9). Für kleinere Abstände vergrößert sich der maximale Abstand von der Hauptmasse auch nicht pro Umlauf (Abb.7 und 8) – es gibt daher keine partielle Expansion.

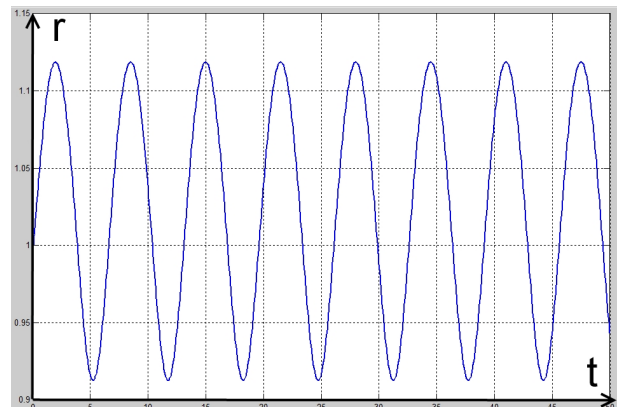


Abbildung 7: Anfangsbedingung: (1; 0.1)

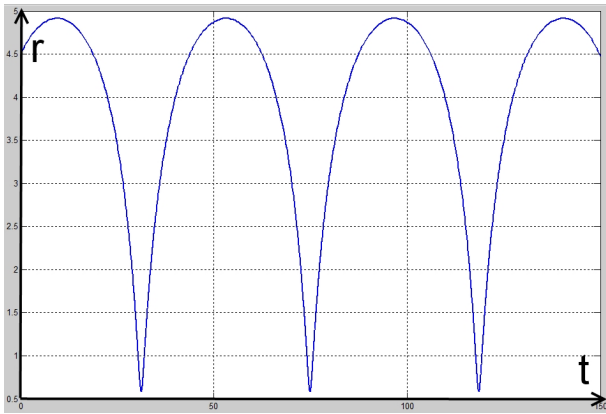


Abbildung 8: Anfangsbedingung: (4,5; 0,1)

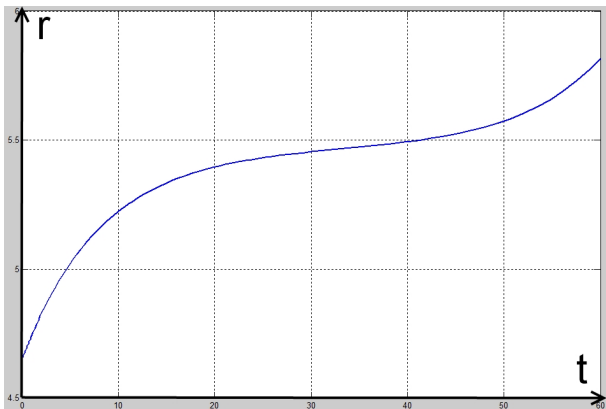


Abbildung 9: Anfangsbedingung: (4,6566; 0,1)

5 Didaktische Konsequenz für den Unterricht

Mit dem Wissen, dass Atome oder unser Sonnensystem nicht an der kosmologischen Expansion teilnehmen, können die Analogieexperimente, die für die Expansion des Universum im Unterricht vorgeführt werden (Gummibandmodell, Luftballon), didaktisch überdacht werden. Führt man zum Beispiel das Luftballonexperiment zur Visualisierung der Expansion des Universums vor, so hat man im Wesentlichen die Wahl, die Galaxien auf den Luftballon einfach mit einem Filzstift zu malen oder in Form von zugeschnittenen Pappstücken drauf zu kleben (Abb. 10 und 11). Führt man ersteres durch (Abb. 10), so werden die gemalten Galaxien im selben Maße größer (oder verschwinden gar) wie der sie umgebende Raum – effektiv hat sich das Verhältnis Galaxiengröße zum Abstand zweier Galaxien gar nicht verändert und suggeriert dem Schüler die falsche Vorstellung, dass sich Galaxien, aber auch alles andere im Universum vergrößert. Das

zweite Modell mit den angeklebten Galaxien auf dem Luftballon erscheint in dieser Hinsicht didaktisch sinnvoller, da beim Aufblasen des Luftballons eben die Galaxien bleiben wie sie sind (Abb. 11) und sich wirklich nur ihr gegenseitiger Abstand ändert – so wie es in den vorherigen Abschnitten nachgerechnet worden ist.



(a)

(b)

Abbildung 10: Didaktisch zu verwerfendes Luftballonexperiment zur Visualisierung der Expansion des Universums – Galaxien mit Filzstift auf Ballon gemalt



(a)

(b)

Abbildung 11: Zu bevorzugendes Experiment – mit aufgeklebten Galaxien aus Pappteilen

6 Literatur

- Price et al.: In an expanding universe, what doesn't expand?
- Domenico Giulini and Matteo Carrera: On the effect of the global cosmological expansion on the local dynamics in the Solar System Final Report

7 Geschriebene Programme

7.1 Problem ohne Kosmologische Expansion

```
function dy=Expand2(t,y)

dy=zeros(2,1);

dy(1)=y(2);
dy(2)=1/y(1)^3-1/y(1)^2;

end
```

Keplerellipse

```
options=odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12);
ta=0.1; te=60; anfangsvektor=[0.8 0.5];
[t,y]=ode113(@Expand2,[ta te],anfangsvektor,options);
plot(t,y(:,1),'LineWidth',2)
shg
grid on
```

Hyperbel

```
options=odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12);
ta=0.1; te=200; anfangsvektor=[0.8 1];
[t,y]=ode113(@Expand2,[ta te],anfangsvektor,options);
plot(t,y(:,1),'LineWidth',2)
shg
grid on
```

7.2 Problem mit Kosmologische Expansion

```
function dy=Expand2(t,y)

dy=zeros(2,1);

alpha=0.1;

dy(1)=y(2);
dy(2)=1/y(1)^3-1/y(1)^2+(a^2)/2*y(1);

end
```

Bild 7

```
options=odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12);
ta=0.1; te=50; anfangsvektor=[1 0.1];
[t,y]=ode113(@Expand2,[ta te],anfangsvektor,options);
plot(t,y(:,1),'LineWidth',2)
shg
grid on
```

Bild 8

```

options=odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12);
ta=0.1; te=150; anfangsvektor=[4.5 0.1];
[t,y]=ode113(@Expand2,[ta te],anfangsvektor,options);
plot(t,y(:,1),'LineWidth',2)
shg
grid on

```

Bild 9

```

options=odeset('RelTol',1e-12,'AbsTol',1e-12);
ta=0.1; te=60; anfangsvektor=[4.6566 0.1];
[t,y]=ode113(@Expand2,[ta te],anfangsvektor,options);
plot(t,y(:,1),'LineWidth',2)
shg
grid on

```

7.3 Bild mit effektiven Potenzial

```

x=linspace(0.5,5,200);
alpha=[0 0.2 0.4];
for i=1:length(alpha)
f=1./(2*x.^2)-1./x-alpha(i)^2/2*x.^2;
plot(x,f,'LineWidth',2)
shg
hold on
end
grid on
axis equal

```